


THE TRVSTEES OF THE
PVBLIC LIBRARY
LVX
OMNIVM
CIVIVM
OF THE CITY OF
BOSTON
1852 1878
GIVEN BY
Boston Soc. of Nat. Hist.







OTTO FISCHER,

AUSSERORDENTLICHES MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

BEITRÄGE

ZU EINER

MUSKELDYNAMIK.

ERSTE ABHANDLUNG:

ÜBER DIE WIRKUNGSWEISE EINGELENKIGER MUSKELN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.)

Des XXII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ II.

MIT 8 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1895.

Einzelpreis: 9 Mark.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.) *) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.
- A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
- P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
- A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.
- C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale u. über das Windungsgesetz v. Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 2. Abdruck. 1863. 3 ℳ.
- F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.
- M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 2. Abdruck. 1867. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.
- M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. Mit 1 Tafel. 1852. 3 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. I. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
- P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
- —— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.
- O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
- —— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen u. deren Anwend. auf die ellipt. Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
- C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
- A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.
- M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Erste Abhandlung. 1856. 5 ℳ.
- R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Zweiter Abdruck. 1889. 1 ℳ 60 ₰.
- H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
- —— Elektr. Untersuch. Dritte Abhandl.: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen u. erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
- G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
- G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
- G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.
- W. G. HANKEL, Elektr. Untersuchungen. 5. Abhandl.: Maassbestimmungen d. elektromotor. Kräfte. 1. Th. 1861. 1 ℳ 60 ₰.
- —— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.
- P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.
- G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 ℳ.
- P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.
- G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. reis 24 ℳ.
- P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.
- —— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ₰.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 ℳ 40 ₰.
- P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.
- —— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

BEITRÄGE
ZU EINER
MUSKELDYNAMIK.

ERSTE ABHANDLUNG:

ÜBER DIE WIRKUNGSWEISE EINGELENKIGER MUSKELN

VON

OTTO FISCHER
AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.)

Des XXII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

N° II.

MIT 8 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1895.

Das Manuscript eingeliefert am 29. Juni 1895.
Der Abdruck vollendet am 10. September 1895.

BEITRÄGE

ZU EINER

MUSKELDYNAMIK.

ERSTE ABHANDLUNG:

ÜBER DIE WIRKUNGSWEISE EINGELENKIGER MUSKELN

VON

OTTO FISCHER
AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.)

MIT 8 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.



DEM ANDENKEN

MEINES THEUREN, UNVERGESSLICHEN LEHRERS

DES

HERRN GEHEIMEN RATHES

PROFESSOR Dr. CARL LUDWIG.

INHALTSVERZEICHNISS.



Einleitung.

Die Aufgaben der Muskelmechanik können zweierlei Art sein. Entweder beschäftigen sie sich mit der Hervorbringung eines Gleichgewichtszustandes: dann bilden sie Probleme der Muskelstatik, oder sie untersuchen die gegenseitige Abhängigkeit von Muskelspannung und der durch die Contraction eines Muskels hervorgebrachten Bewegung: dann gehören sie der Muskeldynamik an.

Die Probleme der Muskelstatik sind von A. Fick[1]) präcis formulirt worden. Sie fragen nach ihm: »1) Wenn ein Muskel ein bestimmtes Contractionsbestreben (Spannung) hat, welches Drehungsbestreben wird dadurch in dem Gelenke hervorgebracht? oder: wo und welche Kraft muss an dem Knochen angebracht werden, um mittelst des Gelenkes der Spannung des Muskels Gleichgewicht zu halten? 2) Wenn mehreren Muskeln gleichzeitig gewisse Spannungen beigelegt werden, welches Drehungsbestreben ist dann im Gelenke? oder: wie kann durch ein anderes Drehungsbestreben (durch eine fremde Kraft hervorgebracht) den Spannungen mittelst des Gelenkes Gleichgewicht gehalten werden? 3) Umgekehrt, wenn ein bestimmtes Drehungsbestreben in einem Gelenke hervorgebracht werden soll, welche Muskeln müssen gespannt werden und wie stark? oder: wenn eine gegebene Kraft auf ein Gelenk wirkt, wie muss man die Muskeln spannen, um der Kraft Gleichgewicht zu halten?«

Es empfiehlt sich, diese drei allgemeinen Probleme zunächst insofern zu vereinfachen, als man annimmt, dass bei eingelenkigen Muskeln derjenige der beiden durch das Gelenk verbundenen Knochen, an welchem sich der in der Anatomie als Ursprung bezeichnete

1) Die medicinische Physik. IV. Capitel: Muskelstatik.

Insertionspunkt des Muskels befindet, oder bei mehrgelenkigen Muskeln alle zwischen dem in Frage kommenden Gelenk und dem Muskelursprung liegenden Knochen durch besondere Kräfte fixirt sind. In dieser Gestalt sind die Probleme von A. Fick für Gelenke von einem Grad der Freiheit (Ginglymusgelenke) und solche von drei Graden der Freiheit (Arthrodien) in erschöpfender Weise theoretisch gelöst worden.

Man kann nun weiterhin die drei allgemeinen Fragen unter der Voraussetzung stellen, dass bei eingelenkigen Muskeln auch der den Ursprung tragende Knochen, und bei mehrgelenkigen Muskeln mehrere der Knochen oder auch die sämmtlichen, welche sich zwischen dem Ansatz und dem Ursprung des Muskels befinden, beweglich sind. Man kann z. B. fragen: Wenn der M. brachialis eine gewisse Spannung hat, welches Drehungsbestreben wird dadurch im Ellbogengelenk hervorgebracht, unter der Voraussetzung, dass der Oberarm im Schultergelenk frei beweglich ist? Diese letztere Frage ist keineswegs dadurch mit beantwortet, dass man festgestellt hat, welches Drehungsbestreben der M. brachialis bei einer bestimmten Spannung im Ellbogengelenk hervorbringt, wenn der Oberarm und damit der Ursprung des Muskels fixirt ist. Das Drehungsbestreben im Gelenk ist im Gegentheil bei frei beweglichem Oberarm ein anderes, und zwar im Allgemeinen grösser als bei festgestelltem Oberarm. Von dieser, vielleicht im ersten Augenblick etwas sonderbar erscheinenden, Thatsache kann man sich leicht durch den Versuch an einem später (pag. 74 ff.) zu beschreibenden Apparat überzeugen; man kann sie aber auch auf rein theoretischem Wege ableiten. Für einen bestimmten Fall kann man sich sogar durch eine verhältnissmässig einfache Ueberlegung davon Rechenschaft geben. Man denke sich die Bewegung im Ellbogengelenk der Beeinflussung durch die Schwere dadurch entzogen, dass man die Längsaxen von Oberarm und Unterarm durch seitliches Erheben des ganzen Armes in eine horizontale Ebene gebracht hat. Der Unterarm sei rechtwinklig gegen den Oberarm gebeugt. Contrahirt sich nun von dieser Stellung aus der M. brachialis, so wird er, wie ich an einer anderen Stelle ausführlich auseinandergesetzt habe[1]), und wie auch durch die weiter unten angeführten

1) Ueber die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln. Archiv für Anatomie und Physiologie. Anatomische Abtheilung 1894, pag. 105.

Versuche bestätigt wird, sowohl den Unterarm gegen den Oberarm, als auch den letzteren gegen den als fest angenommenen Rumpf zu drehen streben. Die auf beide Abschnitte des Armes einwirkenden Drehungsmomente sind gleich gross, besitzen aber entgegengesetzten Drehungssinn. Der Oberarm soll im Schultergelenk nach rückwärts gedreht, der Unterarm im Ellbogengelenk gebeugt werden. Will man den Oberarm fixiren, so kann das nur durch eine Kraft geschehen, welche entgegengesetzt gleiches Drehungsbestreben auf denselben ausübt, als der Muskel. Man kann sich diese Kraft durch die Festigkeit eines Fadens ersetzt denken, welcher zwischen einem Punkte des Oberarms einerseits und einem in einer Wand befestigten Haken anderseits in der aus Figur 1 ersichtlichen Richtung ausgespannt ist. Dem Drehungsbestreben, welches der Muskel unter dieser Voraussetzung im Ellbogengelenk hervorbringt, soll durch eine am Unterarm angreifende, rechtwinklig zur Unterarmlängsaxe, d. h. also parallel der Oberarmlängsaxe gerichtete Kraft K das Gleichgewicht gehalten werden. Denkt man sich nun die Befestigung des Oberarms gelöst, etwa den Faden abgebrannt, so wird sich sofort das Drehungsbestreben, welches der Muskel auf den Oberarm ausübt, geltend machen; der Oberarm wird nach rückwärts gedreht. An den Drehungsmomenten, welche auf den Unterarm einwirken, wird durch das Abbrennen des Fadens nichts geändert. Da die Unterarmlängsaxe senkrecht zu der Oberarmlängsaxe gestellt sein sollte, so wird bei der Drehung des Oberarms im Schultergelenk die Ellbogenaxe wenigstens zu Anfang in der Richtung der Unterarmlängsaxe fortbewegt werden. Der ganze Unterarm wird dabei in derselben Richtung mit fortgezogen. Wenn man nun an einem Körper, etwa an einem Wagen, in einer Richtung zieht, deren Rückwärtsverlängerung durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgeht, so folgt der Körper dem Zuge in der Weise, dass alle Punkte desselben parallele Bahnen beschreiben. Zieht man dagegen in einer Richtung, welche nach rückwärts verlängert seitlich am Schwerpunkte vorbeigeht, so wird mit der Vorwärtsbewegung des Körpers eine Drehung verbunden

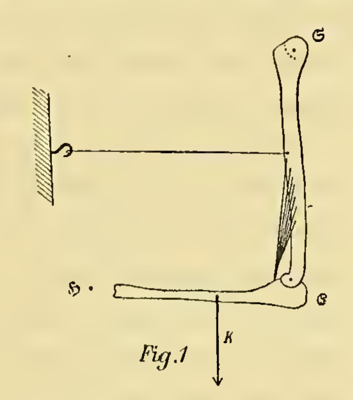


Fig. 1

sein, welche so lange andauert, bis sich der Schwerpunkt in die Zugrichtung eingestellt hat. Von dieser Thatsache kann man sich leicht durch den Versuch überzeugen. Da nun die Unterarmlängsaxe den Schwerpunkt von Unterarm plus Hand enthält[1]), so wird zu Anfang der Rückwärtsdrehung des Oberarms der Unterarm ohne Aenderung der Richtung seiner Längsaxe mit fortgezogen werden. Man bestätigt leicht, dass infolge dessen der Winkel zwischen Oberarmlängsaxe und Unterarmlängsaxe verkleinert werden muss, d. h. dass eine weitergehende Beugung im Ellbogengelenk eintritt. Da nach wie vor am Unterarm die Kraft K wirkt, so erkennt man, dass bei frei beweglichem Oberarm diese Kraft nicht mehr, wie bei fixirtem Oberarm, im Stande ist, dem Drehungsbestreben, welches der Muskel im Ellbogengelenk hervorbringt, das Gleichgewicht zu halten. Es ist also das Drehungsbestreben im Gelenke bei frei beweglichem Oberarm grösser als bei fixirtem Oberarm.

Da sich schon bei den eingelenkigen Muskeln ein wesentlicher Unterschied in der Behandlung der allgemeinen Fragen der Muskelstatik herausstellt, wenn man annimmt, dass auch der den Muskelursprung tragende Knochen beweglich ist, als wenn man denselben festgestellt denkt, so zeigt sich dies naturgemäss in noch viel höherem Grade bei der Betrachtung der mehrgelenkigen Muskeln. Das Drehungsbestreben, welches ein mehrgelenkiger Muskel in einem der Gelenke hervorbringt, über welche er hinwegzieht, hängt nicht allein davon ab, wieviel und welche der zwischen den Insertionsstellen des Muskels liegenden Knochen festgestellt sind, sondern es ist auch mit der Winkelstellung in den übrigen dem Muskel unterstellten Gelenken veränderlich.

Da man sich bisher meistens nur mit der Behandlung der vereinfachten Probleme der Muskelstatik beschäftigt hat, so hat man dabei auch ganz ausser Acht gelassen, dass ein Muskel sogar ein Drehungsbestreben für ein Gelenk besitzen kann, über welches er gar nicht hinwegzieht. Wenn z. B., wie oben ausgeführt worden ist, der M. brachialis den Oberarm gegen den Rumpf nach rückwärts zu drehen strebt, so resultirt hieraus ein Drehungs-

---

1) Vgl. Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, Band XV, Nr. VII.

bestreben dieses Muskels für das Schultergelenk, welches doch scheinbar ganz ausserhalb seines Wirkungsbereiches liegt.

Lässt man also die vereinfachenden Annahmen fallen, unter denen man bisher fast ausschliesslich die Drehungsbestreben untersucht hat, welche die Muskeln für die einzelnen Gelenke besitzen, so eröffnet sich der Forschung noch ein sehr weites unbebautes Feld.

Für eine systematische Behandlung der hier in Betracht kommenden Fragen empfiehlt es sich zunächst, die Wirkung eines Muskels auf die Gelenke streng auseinander zu halten von der Wirkung auf die Knochen. Die Muskeln wirken in erster Linie auf die Knochen drehend ein. Die Wirkung auf die Gelenke ist erst secundär, sie ist eine Folge der gleichzeitigen Drehungsbestreben, welche der Muskel für die verschiedenen durch die Gelenke mit einander verbundenen Knochen besitzt. Die allgemeinen Principien, nach denen sich die drehende Einwirkung eines Muskels auf die verschiedenen ihm unterstellten Knochen bestimmt, habe ich in der erwähnten Abhandlung »Ueber die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln« auseinandergesetzt. Es ist Sache specieller Untersuchungen, die auf die Knochen ausgeübten Drehungsmomente für die einzelnen Muskeln des menschlichen und thierischen Körpers durch Versuche zu ermitteln. Es liegen in dieser Hinsicht noch nicht sehr viel Beiträge vor. Ein Verzeichniss derselben habe ich in meiner Habilitationsschrift (Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Klasse, Band XX, Nr. 1) zusammengestellt.

Ohne mich hier auf specielle Probleme der Muskelstatik einzulassen, möchte ich einige principielle Gesichtspunkte kurz anführen, welche bei derartigen speciellen Untersuchungen am menschlichen und allgemein thierischen Körper wohl zu beachten sind, wenn man nicht in Gefahr kommen will, die Ergebnisse einer solchen Untersuchung falsch zu beurtheilen und unrichtige Schlüsse aus ihnen zu ziehen.

1. Ein Muskel strebt nur diejenigen Knochen unmittelbar zu drehen, über welche er hinwegzieht.

2. Ein Muskel strebt dagegen im Allgemeinen auch Gelenke zu drehen, über welche er nicht hinwegzieht.

3. Ein Muskel strebt dann nicht einen von nur zwei Gelenken begrenzten Knochen zu drehen, wenn seine Zugrichtung parallel der Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte läuft.

4. Ein Muskel strebt dann nicht ein Gelenk zu drehen, wenn die Drehungsmomente, welche er auf die beiden durch das Gelenk verbundenen Knochen ausübt, gleich sind und gleichen Drehungssinn haben. Tritt in einem solchen Falle dennoch Veränderung der Gelenkstellung ein, so ist diese der gegenseitigen Beeinflussung der Knochen in ihren Bewegungen infolge der Gelenkverbindungen zuzuschreiben, wie bei Gelegenheit noch ausführlicher auseinandergesetzt werden soll.

5. Feststellung eines Knochens bedingt keine Aenderung der Drehungsmomente für die übrigen dem Muskel unterstellten Knochen. Daher kann man z. B. den Oberarm fixiren, um das Drehungsmoment eines Muskels für den Unterarm zu bestimmen.

6. Feststellung eines Knochens bedingt dagegen Aenderung der Wirkung auf die Gelenke. Daher darf man z. B. nicht den Oberarm fixiren, wenn man das Drehungsbestreben eines Muskels für das Ellbogengelenk bestimmen will.

7. Feststellung eines Gelenks bedingt Aenderung der Wirkung auf die beiden durch das Gelenk verbundenen Knochen.

8. Feststellung eines Gelenks bedingt auch Aenderung der Wirkung auf die übrigen Gelenke.

Der Beweis für diese und andere hierher gehörende Sätze ist implicite durch die in der erwähnten Arbeit über die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln angestellten Ueberlegungen erbracht.

Hat man nun unter Berücksichtigung dieser Lehrsätze die Drehungsbestreben ermittelt, welche ein Muskel unter den verschiedenen eintretenden Verhältnissen für die einzelnen in Frage kommenden Knochen und Gelenke besitzt, so ist damit noch keineswegs das der Muskeldynamik angehörende Problem gelöst: in welcher Weise sich die Knochen bei der Contraction eines Muskels zu einander thatsächlich drehen. Die eintretende Bewegung hängt nämlich nicht allein von den an den Knochen angreifenden Kräften und den durch sie ausgeübten Drehungsbestreben ab, sondern sie richtet sich in erster Linie nach der mechanischen Beschaffenheit der zu bewegenden Körper, insbesondere nach der Grösse der Massen, nach der Lage des Schwerpunktes und nach der Vertheilung der Masse um den Schwerpunkt. Namentlich der letzte Factor, die Lagerung der Massentheilchen innerhalb der einzelnen Abschnitte des menschlichen oder thierischen Körpers, ist für die ein-

tretende Bewegung von der allergrössten Bedeutung. Die nothwendige Berücksichtigung desselben ist die Ursache, dass die Probleme der Muskeldynamik viel verwickelter und schwerer zu lösen sind, als die der Muskelstatik.

Indem die Muskelstatik nur nach den Beziehungen fragt, welche zwischen äusseren Kräften und den Muskelspannungen bestehen müssen, damit keine Bewegung eintritt, kommt für sie die mechanische Beschaffenheit der einzelnen Gliederabschnitte nur insofern in Betracht, als sich aus der Grösse der Masse und der Lage des Schwerpunktes in jedem Körpertheile die Intensität und der Angriffspunkt der als äussere Kraft wirkenden Schwere ergiebt. Es ist aber für sie ganz gleichgültig, ob die Masse des Körpertheils dicht um den Schwerpunkt gelagert ist, wie bei einer Kugel, oder ob sie sich auf grössere Strecken vertheilt, wie bei einem Cylinder von kleinem Querschnitt aber grosser Länge.

Denkt man sich beispielsweise ein um eine Axe 𝔄 (Fig. 2) drehbares Pendel, welches aus einem sehr dünnen, aber genügend starren Draht 𝔄𝔅 gebildet wird, an dem in der Mitte 𝔖 eine schwere Bleikugel angebracht ist. Denkt man sich dieses Pendel aus der Ruhelage heraus in die horizontale Stellung gebracht,

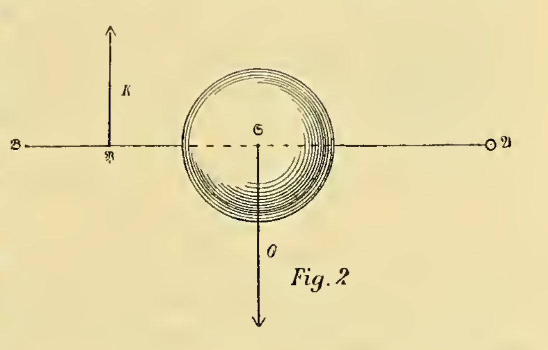


Fig. 2

so wird an demselben die Schwere wie eine äussere im Punkte 𝔖 (Schwerpunkt) angreifende und vertical nach unten ziehende Kraft wirken. Vorausgesetzt, dass das Gewicht des Drahtes gegenüber dem Gewicht G der Bleikugel nicht in Betracht kommt, wird die Grösse dieser Kraft direct durch G gemessen. Bringt man nun an einem beliebigen Punkte 𝔓 des Drahtes eine vertical nach oben ziehende Kraft K an, für welche das statische Moment $K . \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}$ in Bezug auf die Axe 𝔄 gleich dem statischen Moment $G . \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{S}}$ der Schwerkraft ist, so wird das Gleichgewicht hergestellt sein; das Pendel wird in seiner horizontalen Lage verharren. Denkt man sich andererseits einen homogenen Cylinder von derselben Länge 𝔄𝔅 und demselben Gewicht G (Fig. 3), oder vertheilt man an Stelle der einen Bleikugel vom Gewicht

G zwei solche vom halben Gewichte in der Weise auf dem starren Draht der Fig. 2, dass ihre Mittelpunkte nach 𝔄 und 𝔅 fallen (Fig. 4), macht man ferner beide Körper ebenfalls um eine an dem einen Ende angebrachte Axe 𝔄 drehbar, und denkt man auch diese Pendel aus der verticalen Lage in die horizontale Stellung gebracht, so wird auf diese beiden Körper die Schwere ebenfalls wie eine im Mittelpunkte 𝔖 angreifende, vertical nach unten gerichtete Kraft G wirken. Auch bei diesen Pendeln kann das Gleichgewicht durch die gleiche in dem zu 𝔄 genau wie in Fig. 2 liegenden Punkte 𝔓 vertical nach oben ziehende Kraft K hergestellt werden, da dann wieder $K . \overline{𝔄𝔓} = G . \overline{𝔄𝔖}$ ist. Dasselbe würde für einen um eine horizontale Axe 𝔄 drehbaren Körper von beliebigen Dimensionen und ganz beliebiger Gestalt (Fig. 5) gelten, wenn nur das Gesammtgewicht das gleiche ist und der Angriffspunkt 𝔖 der Gewichtskraft, d. h. der Schwerpunkt des Körpers, sich in derselben Entfernung $\overline{𝔄𝔖}$ von der Axe befindet, wie bei den Pendeln Fig. 2, 3 und 4. Auch bei einem solchen Körper wird die horizontale Lage sicher gestellt durch die gleiche im Punkte 𝔓 (welcher von 𝔄 dieselbe Entfernung besitzt wie bei Fig. 2, 3 und 4) angreifende Kraft K, deren statisches Moment gleich dem statischen Moment der Schwere ist.

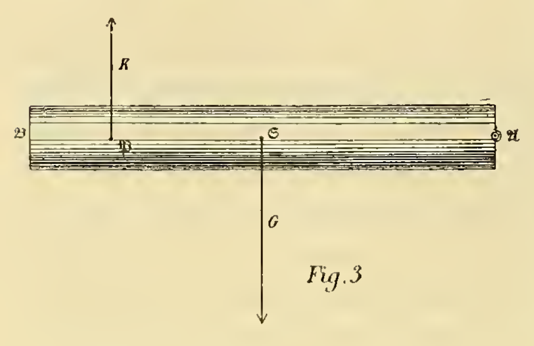


Fig. 3

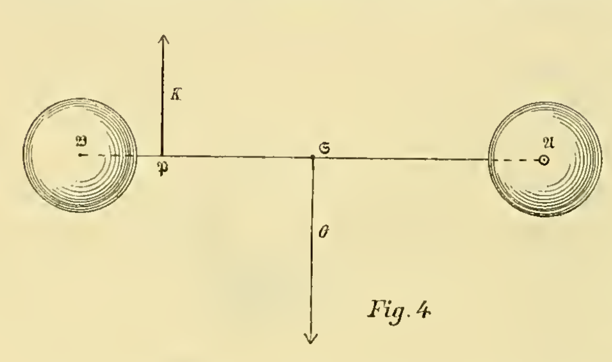


Fig. 4

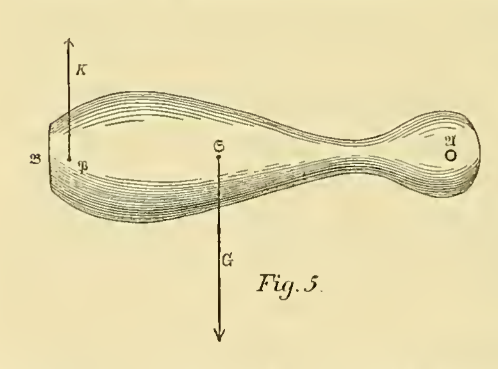


Fig. 5

Es verhalten sich also in dem Falle, wo allein der Schwere das

Gleichgewicht gehalten werden soll, die vier Körper ganz gleich, sobald sie nur dasselbe Gewicht und dieselbe Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsaxe aufweisen.

Nehmen wir nun aber an, dass das Gleichgewicht nicht hergestellt ist, sondern dass z. B. die vier Körper, nachdem sie in die horizontale Stellung gebracht worden sind, dem Zuge der Schwere überlassen werden, so wird die Bewegung, welche alsdann eintritt, deren Bestimmung ein Problem der Dynamik bildet, bei den vier Körpern durchaus nicht gleich ausfallen. Der erste Körper (Fig. 2) wird sich schneller bewegen wie der vierte (Fig. 5), dagegen wird der vierte seinerseits den zweiten Körper (Fig. 3) und dieser wieder den dritten (Fig. 4) an Schnelligkeit übertreffen. Lässt man jeden der vier Körper wie ein Pendel hin und her schwingen, so wird die Schwingungsdauer des ersten die kürzeste, die des dritten die längste sein. Es spielt dabei eben nicht nur die Lage des Schwerpunktes und die Grösse des Gesammtgewichts eine Rolle, sondern es kommt vor allen Dingen auch die Vertheilung der Masse um den Schwerpunkt und die daraus folgende Lagerung der Massentheilchen gegen die Drehungsaxe in Betracht. Je dichter die ganze Masse um den Schwerpunkt herum gelagert ist, um so grösser ist die Drehungsgeschwindigkeit, welche der Körper durch die Wirkung der Schwere erhält.

Denkt man die Drehungsaxe $\mathfrak{A}$ vertical gestellt, so dass die Wirkung der Schwere auf die Drehung eliminirt ist, und lässt nun in bestimmter Entfernung von der Drehungsaxe auf jeden der vier Körper eine äussere Kraft K in derselben Weise einwirken, so wird sich ein entsprechendes Resultat ergeben. Die Bewegung des ersten Körpers wird die schnellste, die des dritten die langsamste sein.

Aus diesem einfachen Beispiele ist wohl klar zu ersehen, dass die Gliederbewegungen, welche die einzelnen Muskeln bei ihrer Contraction hervorrufen, wenn die Wirkung der Schwere auf die Gelenkbewegungen vorläufig ausgeschlossen gedacht wird, in erster Linie von der mechanischen Beschaffenheit der einzelnen Gliederabschnitte, also von deren Gestalt, von deren Gewicht und von der Vertheilung der Massen innerhalb derselben abhängen werden. Drei in ganz gleicher Weise inserirende Muskeln gleicher Grösse, von denen der eine zwischen Oberarm und Unterarm, der zweite zwischen

Oberschenkel und Unterschenkel und der dritte zwischen Unterschenkel und Fuss ausgespannt ist, würden bei gleicher Innervation ganz verschiedene Bewegungen der durch Ellbogen-, Knie- bezüglich Fussgelenk mit einander verbundenen Gliederabschnitte hervorrufen, selbst wenn man annehmen wollte, dass alle drei Gelenke nur Drehungen um eine feste Gelenkaxe gestatteten. Der Grund, weshalb in den drei Fällen nicht eine gleiche Bewegung eintritt, liegt ausschliesslich darin, dass der Muskel in jedem Falle anderer Massenvertheilung in den Gliederabschnitten gegenübersteht.

Lässt man nun die Schwere mit eingreifen, so werden die Bewegungen der einzelnen Gliederabschnitte wesentlich modificirt. Dies geht schon daraus hervor, dass die Schwere allein im Stande ist, Gelenkbewegungen hervorzurufen. Denkt man sich beispielsweise das Bein mit rechtwinklig gebeugtem Knie so weit erhoben, bis die Oberschenkellängsaxe horizontal gerichtet ist, und nun dasselbe der alleinigen Wirkung der Schwere überlassen, so wird im Anfang sowohl Drehung des Oberschenkels nach unten, d. h. Streckung des Hüftgelenks, als auch Streckung des Kniegelenks eintreten. Ober- und Unterschenkel werden dann so lange hin und her pendeln, bis der Schwerpunkt des ganzen Beines am weitesten in verticaler Richtung nach unten vom Hüftgelenk entfernt ist; dies tritt ein, wenn das Bein im Kniegelenk gestreckt ist und die Längsaxe des ganzen Beines vertical steht. Die Wirkung der Schwere auf die Gelenke wird aber nicht immer in der gleichen Stärke und in dem gleichen Drehungssinne erfolgen. Denkt man sich z. B. bei stark nach vorn geneigtem Rumpf das gestreckte Bein so weit als möglich nach hinten erhoben, so wird die Schwere die entgegengesetzte Drehung im Hüftgelenk, also Flexion, und unter Umständen anfangs sogar Flexion im Kniegelenk bewirken.

Man hat daher für eine systematische Behandlung der Probleme, welche die Muskeldynamik darbietet, die Bewegungen, welche bei Ausschluss der Schwere durch die Contraction der Muskeln hervorgerufen werden, streng auseinander zu halten von den Bewegungen, welche die Muskeln im Verein mit der Schwere erzeugen. Demnach lassen sich für die Muskeldynamik die folgenden sechs allgemeinen Fragen unterscheiden:

1. Welche Bewegung tritt ein, wenn ein Muskel allein sich contrahirt und die Wirkung der Schwere ausgeschlossen ist?

2. In welcher Weise wird die bei der Contraction eines Muskels eintretende Bewegung durch die Wirkung der Schwere abgeändert?

3. Welche Bewegung tritt ein, wenn mehrere Mnskeln sich gleichzeitig contrahiren und die Wirkung der Schwere ausgeschlossen ist?

4. In welcher Weise wird die bei der gleichzeitigen Contraction mehrerer Muskeln eintretende Bewegung durch die Wirkung der Schwere .abgeändert?

5. Wenn eine bestimmte Bewegung eintreten soll, welche Muskeln müssen sich contrahiren und mit welcher Stärke, wenn die Schwere keinen Einfluss auf die Bewegung ausüben soll?

6. Wenn eine bestimmte Bewegung eintreten soll, welche Muskeln müssen sich contrahiren und mit welcher Stärke, wenn auch die Schwere mit an der Hervorbringung der Bewegung betheiligt ist?

Beachtet man nun, dass die bewegende Wirkung eines Muskels eine andere ist, wenn den einzelnen Körpertheilen freie Beweglichkeit in den Gelenken zukommt, als wenn einzelne Knochen oder Gelenke festgestellt sind, so erkennt man, dass diese allgemeinen Fragen der Untersuchung ein sehr weites Feld eröffnen. Dies ist um so mehr der Fall, als sich bisher nur wenig Probleme der Muskeldynamik, und auch diese nur unter den oben (pag. 55 und 56) für die Muskelstatik angeführten vereinfachenden Annahmen, gelöst finden.

Es liegt in der Natur der Sache, dass man die Probleme der Muskeldynamik nur in der angeführten Reihenfolge behandeln kann. Die Fragen 5 und 6 bilden in gewissem Sinne das Endziel aller Forschung auf muskeldynamischem Gebiete. Wie man die Ursachen der Bewegung und Arbeitsleistung eines elektromagnetischen Motors nur bestimmen und messen kann, nachdem man sich über die Kraftwirkungen zwischen Stromspiralen und Magneten volle Klarheit verschafft hat, so kann man nicht erwarten, Aufschluss über die Rolle zu erhalten, welche den verschiedenen Muskeln bei der Hervorbringung einer bestimmten Gliederbewegung zugetheilt ist, bevor man nicht eingehende Kenntniss der Bewegungen erlangt hat, welche die einzelnen Muskeln allein den Gliederabschnitten des menschlichen und thierischen Körpers bei ihrer Contraction zu ertheilen vermögen. Es muss daher vor allen Dingen die zuerst angeführte Frage in Angriff genommen werden.

Die Frage: »Welche Bewegung tritt ein, wenn ein Muskel allein sich contrahirt und die Wirkung der Schwere ausgeschlossen ist?« umfasst nun allein schon eine grosse Anzahl von Einzelproblemen. Man kann dieselbe zunächst für eingelenkige Muskeln aufwerfen. Dann hat man zu unterscheiden, ob die beiden Knochen, an welchen der Muskel inserirt, durch ein Gelenk von einem Grade der Freiheit, z. B. ein Ginglymusgelenk, oder ob sie durch ein Gelenk von mehreren Graden der Freiheit, wie es z. B. unter anderen eine Arthrodie darstellt, mit einander verbunden sind. Man hat ferner dabei den Fall, dass der den Muskelursprung tragende Knochen durch besondere Kräfte fixirt ist, auseinander zu halten von dem Falle, in welchem beiden Knochen Beweglichkeit gelassen ist. In letzterer Hinsicht hat man wiederum zu unterscheiden, ob beiden Knochen, abgesehen von dem durch ihre Gelenkverbindung gesetzten Zwang, volle Freiheit in ihren Bewegungen gestattet ist, wie es z. B. bei einem nur aus zwei Gliedern bestehenden frei im Raume oder im Wasser schwebenden System der Fall sein würde, oder ob einer der Knochen oder beide wiederum mit anderen Knochen durch Gelenke verbunden sind. Es ist dabei fernerhin nicht ohne Belang, ob diese ausserhalb des in Betracht gezogenen zweigliedrigen Knochensystems liegenden Knochen ihrerseits festgestellt sind, oder ob auch sie in gewisser Weise den Bewegungen der zwei Knochen folgen können. Man hat weiterhin verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach der Grösse der Drehungsmomente, welche der Muskel für die verschiedenen Gelenkstellungen infolge seiner Ansatzweise bei bestimmter Spannung auf die beiden Knochen ausübt, — kurz, man sieht sich allein schon bei der Untersuchung der Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln vor eine sehr ausgedehnte Reihe von Problemen gestellt, welche zum grossen Theil erst gelöst werden müssen, bevor man hoffen darf, mit Erfolg die viel verwickelteren Verhältnisse aufzuklären, die sich bei der Contraction eines mehrgelenkigen Muskels einstellen.

In der vorliegenden Arbeit soll nun zunächst eins der bisher noch nicht in Angriff genommenen Probleme, welche die erste der sechs allgemeinen Fragen in sich fasst, einer eingehenden Untersuchung unterworfen werden.

Fragestellung.

Es ist im Verlaufe der einleitenden Betrachtungen und auch in früheren Untersuchungen (vgl. u. a. Archiv für Anatomie und Physiologie, anatomische Abtheilung 1894, pag. 114 Anmerkung) mehrfach erwähnt worden, dass ein eingelenkiger Muskel nicht bloss den Knochen, an welchem er ansetzt, sondern auch denjenigen, an welchem sich sein Ursprung befindet, zu drehen strebt. Um das öfter herbeigezogene Beispiel des M. brachialis wieder aufzugreifen, kann man sagen, dass dieser Muskel bei seiner Contraction sowohl den Unterarm im Sinne einer Beugung im Ellbogengelenk als auch den Oberarm im Sinne einer Rückwärtsdrehung oder Streckung im Schultergelenk drehen will. Es liegt nun die Frage nahe: Wird bei der Contraction des M. brachialis thatsächlich eine merkliche Drehung im Schultergelenk eintreten, oder wird diese Gelenkbewegung gegenüber der Beugung im Ellbogengelenk verschwinden? Wird also der M. brachialis allein auf das Ellbogengelenk drehend einwirken, über welches er hinwegzieht, oder wird er auch in *wahrnehmbarer Weise auf das Schultergelenk bewegend einwirken*, über welches er gar nicht hinwegzieht? Die Theorie der Drehungsmomente sagt weiterhin, dass die eingelenkigen Theile des M. triceps brachii, also das Caput laterale und Caput mediale, sowohl den Unterarm im Sinne einer Streckung im Ellbogengelenk als auch den Oberarm im Sinne einer Vorwärtsdrehung oder Beugung im Schultergelenk zu bewegen streben. Man kann auch hier die Frage aufwerfen: Wird bei alleiniger Contraction der beiden am Humerus entspringenden Theile des Triceps sich thatsächlich eine merkliche Beugung im Schultergelenk einstellen, oder wird dieselbe gegenüber der Streckung im Ellbogengelenk verschwinden? Wird also sowohl

das Caput laterale als auch das Caput mediale des M. triceps allein auf das Ellbogengelenk wirken, über welches dieselben hinwegziehen, oder werden sie auch in wahrnehmbarer Weise auf das Schultergelenk einwirken, über welche sie gar nicht hinwegziehen?

Man hat es bisher wohl stillschweigend als selbstverständlich angenommen, dass die Muskeln nur auf Gelenke wirken, über welche sie hinwegziehen; denn es findet sich, so viel mir bekannt ist, nirgends, in keinem Lehrbuche der Anatomie oder Physiologie, auch in keiner Specialarbeit über Muskelwirkung, selbst nicht in dem klassischen Werke von Duchenne: »Physiologie des Mouvements«, eine Andeutung darüber vor, dass die Muskeln auch auf Gelenke wirken, welche sich jenseits der Insertionsstellen des Muskels befinden. Ein Zweifel, ob z. B. der M. brachialis und die eingelenkigen Theile des M. triceps auch wahrnehmbare Gelenkbewegungen im Schultergelenk hervorbringen, liegt auch nahe, wenn man bedenkt, dass bei einer Drehung im Schultergelenk die Masse des ganzen Armes, bei einer Drehung im Ellbogengelenk dagegen nur die Masse des Unterarmes in Bewegung gesetzt werden muss.

Sollte sich nun aber trotz alledem herausstellen, dass die über das Ellbogengelenk hinwegziehenden eingelenkigen Armmuskeln nicht nur Beuger oder Strecker des Ellbogengelenks, sondern auch in merklichem Maasse Strecker oder Beuger des Schultergelenks sind, so entsteht weiterhin die Frage: Um welchen Winkel und in welchem Sinne wird der Oberarm gegen den Rumpf im Schultergelenk gedreht, wenn der Unterarm bei der Contraction eines solchen eingelenkigen Muskels um einen ganz bestimmten Winkel im Ellbogengelenk gebeugt oder gestreckt wird? oder auch: Wie gross ist dabei das Verhältniss der Drehungen im Schultergelenk und Ellbogengelenk; besitzt dasselbe für jede Ausgangshaltung des Armes denselben Werth, ändert es sich mit der Spannung des Muskels, ist es für Muskeln mit verschiedenen Insertionsstellen verschieden?

Es giebt mehrere Wege, um die vorliegenden und ähnliche Fragen zu entscheiden und eventuell die Aenderungen des Drehungsverhältnisses beider Gelenke messend zu verfolgen.

Erstens: man sucht am Lebenden den betreffenden eingelenkigen Muskel allein durch elektrische Reizung zur Contraction zu bringen und stellt dabei den ganzen Arm von vornherein horizontal, sodass

die Schwere keinen Einfluss auf die eintretenden Gelenkbewegungen haben kann. Auf diesem Wege wird man die Frage wenigstens qualitativ zur Entscheidung bringen können, wenn auch infolge der vielen Fehlerquellen, welche derartige Versuche am Lebenden stets aufweisen, und infolge der Schwierigkeit, die Reize so abzustufen, dass man einen ganz bestimmten Grad der Spannung durch sie hervorruft, genaue Messungen der Gelenkbewegungen schwer durchführbar sein werden.

Zweitens kann man an einem Modell die Massenverhältnisse und die Massenvertheilung in den beiden Hauptabschnitten des Armes nachahmen und dann an diesem künstlichen Gliedersystem durch stark ausgespannte Gummifäden oder etwa auf elektromagnetischem Wege Kraftwirkungen hervorbringen, welche den bei der Contraction eines eingelenkigen Muskels geäusserten gleichkommen. Die Wirkung der Schwere lässt sich dabei leicht ausschliessen, wenn man die einzelnen Glieder mittelst glatt polirter Glas- oder Elfenbeinstifte auf einer ebenen, horizontal eingestellten, Spiegelglasplatte gleiten lässt. An einem derartigen Modell kann man die Fehlerquellen und die störend auf den Bewegungsvorgang einwirkenden Einflüsse möglichst reduciren. Man ist daher nicht nur in der Lage, auf diesem Wege die Art der Bewegung zu ermitteln, sondern man kann auch genaue Messungen anstellen über das Drehungsverhältniss in beiden Gelenken, sowie über die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit welchen die einzelnen Glieder sich bewegen; man ist endlich auch im Stande, durch Aenderung der Insertionsstellen des Muskels und der Spannung, durch Aenderung der Massenverhältnisse und Massenvertheilung in den beiden Gliederabschnitten, die Versuche zu variiren und dadurch den Einfluss aufzudecken, welchen alle die einzelnen Grössen auf das Zustandekommen der Gelenkbewegungen ausüben.

Neben diesen beiden experimentellen Wegen kann man nun drittens zur Beantwortung der Fragen auch einen rein theoretischen Weg einschlagen. Hat man sich eine genaue Kenntniss von der mechanischen Beschaffenheit der beiden Hauptabschnitte des Armes verschafft, kennt man also das Gewicht derselben, die Lage des Schwerpunktes innerhalb eines jeden und die Massenvertheilung um den Schwerpunkt, welche, so weit sie mechanisch in Betracht kommt, in der Grösse der Trägheitsmomente ihren Ausdruck findet, und weiss

man, in welcher Weise sich der zu untersuchende eingelenkige Muskel zwischen den beiden Knochen ausspannt, so hat man damit alle Daten gewonnen zur Lösung des mechanischen Problems, den Bewegungsvorgang zu bestimmen, welcher durch die Contraction des Muskels mit bestimmter Spannung hervorgerufen wird. Wenn auch dieser dritte Weg der sicherste und einwurfsfreieste von allen ist, so stösst man jedoch bei Beschreitung desselben oft auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Die nothwendigen Hülfsmittel, die uns die Mathematik an die Hand zu geben hat, reichen trotz der so hohen Entwickelung, welche bis heute diese Wissenschaft erfahren hat, in vielen Fällen für eine erschöpfende Behandlung der einschlägigen Fragen nicht aus. Wenn man nun auch auf diesem letzten Wege nicht immer bis zu dem äussersten Ziele gelangen kann, so wird derselbe doch in allen Fällen das Problem in Angriff zu nehmen gestatten und dann einen Ausblick auf das zu erforschende Gebiet ermöglichen, und man wird von ihm aus beurtheilen können, in welcher Weise man am besten auf den anderen Wegen, denen des Versuches, zu einer Lösung der Probleme kommen kann.

So liegt es denn auf der Hand, dass man sich nicht auf den Versuch allein beschränken darf. Experiment und theoretische Ueberlegungen müssen ineinander greifen, wenn man nicht Gefahr laufen will, die Erscheinungen einseitig zu beurtheilen. Insbesondere müssen in den einfacheren Fällen, welche auch der mathematischen Behandlung vollständig zugänglich sind, Experiment und Theorie sich gegenseitig controliren. Durch die Vereinigung beider muss ferner ein Einblick in die Genauigkeit gewonnen werden, welche man mit Hülfe des Versuches allein zu erreichen vermag, damit man in den Fällen, in welchen man vorzugsweise auf den Versuch angewiesen ist, die Sicherheit der Resultate weder überschätzen, noch zu gering anschlagen wird.

Bei den vorliegenden, die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln betreffenden, Fragen führen nun alle Wege, die des Versuches und der der theoretischen Ableitung, zum Ziele. Welchen Weg man in diesem besonderen Falle zuerst einschlägt, ist im Princip gleichgültig. Dem Einen wird die experimentelle Erforschung mehr zusagen, und er wird den Resultaten derselben ein grösseres Gewicht beilegen als den Ergebnissen theoretischer Betrachtungen. Der Andere wird es

vorziehen, zuerst den theoretischen Weg zu beschreiten und dann den Versuch als Prüfstein seiner theoretischen Ergebnisse gelten zu lassen. Für mich lag das letztere Verfahren zur Ableitung der Resultate schon desbalb näher, weil ich früher an einer anderen Stelle[1]) die allgemeinen theoretischen Gesichtspunkte, welche für die Untersuchung eines jeden speciellen Falls massgebend sind, auseinandergesetzt und die zwischen den Kräften einerseits und den die Gliederbewegung ausserdem bestimmenden Grössen andererseits geltenden Beziehungen abgeleitet habe.

Trotzdem halte ich es für zweckmässig, bei der Darstellung der Untersuchung und der durch dieselbe gewonnenen Resultate umgekehrt zu verfahren. Es sollen daher zunächst in einem I. Theile der Arbeit die Versuche angeführt werden, welche über die Wirkungsweise der eingelenkigen Muskeln Aufschluss geben. Darauf soll dann in einem II. Theile gezeigt werden, dass man auf rein theoretischem Wege zu denselben Ergebnissen kommt, und dass dieselben qualitativ nicht nur für das zum Versuch herangezogene Gliedersystem, sondern für alle Systeme von zwei durch ein Gelenk verbundenen Gliedern Geltung besitzen. Es soll dabei versucht werden, die mathematische Ableitung, so weit es sich thun lässt, möglichst elementar zu gestalten, damit auch Derjenige zu folgen vermag, welcher das Beweisen mathematischer Lehrsätze und das Anwenden derselben auf mechanische Probleme nicht zu seiner täglichen Beschäftigung rechnet.

---

1) Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. XX. Nr. I.

I. Theil.

Versuche über die bei der Contraction eingelenkiger Muskeln eintretenden Bewegungen.

In Betracht gezogen wurde ein System von zwei Gliedern, welche durch ein Charniergelenk, d. h. ein Gelenk von einem Grade der Freiheit mit fester Gelenkaxe, untereinander verbunden sind. Das eine dieser beiden Glieder soll wiederum mit einem dritten, als fixirt angenommenen, Körpertheil durch ein Gelenk verbunden sein, welches unter anderen Drehungen um eine der Charnieraxe parallele Axe gestattet. Der im Ellbogengelenk gegliederte Arm iefert ein Beispiel eines derartigen Gliedersystems, wenn man das Radioulnargelenk, das Handgelenk, die Metacarpophalangealgelenke, sowie die Fingergelenke festgestellt denkt und sowohl den Oberarm einerseits als den Unterarm zusammen mit der Hand andererseits als je eine starre Masse auffasst, wenn man ferner von den geringen Schwankungen der Ellbogenaxe absieht, und wenn man endlich den Rumpf und den Schultergürtel durch besondere Kräfte im Raume fixirt annimmt. Als weiteres Beispiel wäre das im Kniegelenk und Hüftgelenk bewegliche Bein anzusehen, wenn man den Fuss mit dem Unterschenkel fest verbunden denkt, sowohl das System Unterschenkel plus Fuss, als auch den Oberschenkel als je eine starre Masse auffasst und das Becken im Raume fixirt annimmt; allerdings müsste man dabei von der, die Bewegung im Kniegelenk begleitenden, geringen Rotation des Unterschenkels um seine Längsaxe vorläufig absehen und die nicht ganz streng realisirte Annahme einer festen Knieaxe machen. Lässt man die Bewegung im oberen Sprunggelenke, welche nahezu um eine feste Axe stattfindet, frei, denkt dagegen den Oberschenkel fixirt, so wird auch das aus Unterschenkel und

Fuss bestehende zweigliedrige System ein hierher gehörendes Beispiel abgeben, wenn man nur den Fuss einerseits und den Unterschenkel andererseits als starre Massen auffasst. Aehnliche Beispiele in kleinerem Maassstabe findet man noch zahlreiche, wenn man die Gliederung des Unterarms, der Hand oder des Fusses besonders ins Auge fasst und entsprechende Annahmen macht. Ohne derartige vereinfachende Annahmen über das Verhalten der einzelnen Körperabschnitte, welche zwar niemals ganz streng, sehr oft aber doch nahezu ihre Verwirklichung finden können, würde man das Problem der Wirkungsweise eines einzelnen Muskels überhaupt nicht in Angriff zu nehmen im Stande sein.

Es ist ja nicht ausgeschlossen, dass man späterhin die eine oder andere Vereinfachung wieder fallen lässt und untersucht, in welchem Grade dadurch die erhaltenen Resultate modificirt werden. Für's Erste ist aber eine Beschränkung geboten, wenn man nicht gleich von vornherein auf Schwierigkeiten stossen will, welche sich nicht überwinden lassen.

Auf ein Gliedersystem von der beschriebenen Beschaffenheit soll nun ausschliesslich ein sich zwischen beiden Gliedern erstreckender eingelenkiger Muskel bewegend einwirken, dessen resultirender Zug senkrecht zur Charnieraxe gerichtet ist. Der Einfluss der Schwere auf die Gelenkbewegung soll dabei ausgeschlossen sein. Das letztere lässt sich dadurch erreichen, dass man das Gliedersystem in eine Lage bringt, bei welcher die Charnieraxe vertical steht und bei der Gliederbewegung vertical bleiben muss. Die beiden Glieder können sich dann nur in der Weise bewegen, dass ein jeder Punkt derselben Bahnen beschreibt, welche in einer Horizontalebene liegen. Auf eine horizontale Bewegung kann aber die Schwere unmittelbar weder beschleunigend noch verzögernd einwirken.

Die Versuche wurden auf zwei Arten angestellt, einmal an einem künstlich hergestellten System, welches die Verhältnisse an einem bestimmten Gliedersystem des menschlichen Körpers mit genügender Genauigkeit nachahmte, und dann am Lebenden selbst. Die Versuche der ersteren Art erlaubten eine eingehende Messung der Einzelheiten der Bewegungsvorgänge, die der letzteren Art dienten zur Controle der bei jenen erhaltenen Resultate.

Um ein bestimmtes Beispiel herauszugreifen, wurden zur Construction des künstlichen Systems die Verhältnisse des nur im Ellbogen-

und Schultergelenk beweglichen Armes als Vorbild genommen. Es ist nun nicht nöthig, die Form und die innere Structur der Armabschnitte genau nachzuahmen, wenn man ein dem Arm mechanisch gleichwerthiges System erhalten will. Zwei einzelne Körper verhalten sich zum Beispiel gegenüber angreifenden Kräften schon dann in vollständig gleicher Weise, wenn sie dasselbe Gewicht und gleiche Trägheitsradien für entsprechende Axen durch den Schwerpunkt besitzen. Damit auch zwei Gliedersysteme der beschriebenen Art mechanisch als äquivalent angesehen werden können, ist ausser der Gleichheit von Gewicht und Trägheitsradien für je zwei entsprechende Körper beider Systeme nur noch erforderlich, dass die Schwerpunkte entsprechender Körper gleiche Lage zu der Charnieraxe besitzen, und dass die Entfernung der beiden Gelenkaxen an dem einen Körper für beide Systeme die gleiche ist. Kommt es nur, wie bei dem ins Auge gefassten Problem, auf die Bestimmung des Verhältnisses der Drehungen in den beiden Gelenken hinaus, so kann man sogar von der einen Forderung Abstand nehmen, dass die Gewichte entsprechender Körper beider Systeme genau gleich sind; es genügt dann schon, das Gewichtsverhältniss am einen System mit dem am anderen in Uebereinstimmung zu bringen. Dies sind alles aus der Mechanik bekannte Thatsachen; ein besonderer Beweis für dieselben ist ausserdem im II. Theil dieser Arbeit enthalten.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend liess ich durch Herrn Präcisionsmechaniker E. ZIMMERMANN in Leipzig (Emilienstr. 21) folgenden Apparat anfertigen, von dem Tafel I das photographische Abbild giebt.

Jeder der beiden, den Oberarm und das starre System Unterarm plus Hand darstellenden Theile besteht aus einer Messingröhre von 25 mm Durchmesser, an welche beim Oberarm beiderseits, beim Unterarm dagegen nur an dem Ellbogenende ein massives Messingstück angelöthet ist, um die dem Schultergelenk und dem Ellbogengelenk entsprechenden Gelenkverbindungen zu ermöglichen. Als Vorbild wurde ein Arm benutzt, dessen Gesammtgewicht 3683 g[1])

---

1) Diese und die folgenden Grössen sind zum Theil an einem Präparat gemessen, zum Theil, unter Berücksichtigung der veränderten Dimensionen, aus der auf Seite 456 der Arbeit »Über die Trägheitsmomente des menschlichen Körpers« (Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch. math.-phys. Klasse, Bd. XVIII) niedergelegten Tabelle entnommen worden.

betrug, von denen 1908 g auf den Oberarm und 1775 g auf Unterarm mit Hand kommen. Als Länge des Oberarms, d. h. also als Entfernung des Schultergelenkmittelpunktes vom Mittelpunkt der Ellbogenaxe wurden 30,3 cm, als Entfernung des Handgelenkmittelpunktes vom Mittelpunkt der Ellbogenaxe 27,2 cm verwendet. Der auf der Oberarmlängsaxe liegende Schwerpunkt des Oberarms besitzt dann 13,6 cm Entfernung vom Schultergelenkmittelpunkt, und der auf der Unterarmlängsaxe befindliche Schwerpunkt des Systems Unterarm plus Hand 19 cm Entfernung von der Ellbogenaxe.

Da es technisch schwierig ist, Massen von so grossem Gewicht auf einer Unterlage ohne merkliche Reibung gleiten zu lassen, so wurde der Oberarmtheil nur 1187 g und der das System Unterarm plus Hand vertretende Theil nur 1130 g schwer gemacht, so dass also das verwendete Gliedersystem ein Gesammtgewicht von 2317 g besass. Ursprünglich war beabsichtigt worden, genau die Hälften der wirklichen Gewichte zu verwenden. Durch eine Reihe von Nebentheilen, welche sich erst im Laufe der Construction des Apparates als nothwendig herausstellten, waren aber die Gewichte bis auf die angegebene Höhe gekommen. Dadurch war auch das ursprünglich genau abgepasste Gewichtsverhältniss etwas verändert worden. Das Verhältniss der richtigen Gewichte 1908 g und 1775 g beträgt nämlich 1,07, während das Verhältniss der verwendeten Gewichte 1187 g und 1130 g nur den Werth 1,05 besitzt. Diese kleine Abweichung liess sich jedoch hinterher nicht mehr gut machen, wenn man nicht den ganzen Apparat von vorn neu aufbauen wollte. Dieselbe ist indess auch nicht so gross, dass sie die Resultate in Anbetracht der so wie so nicht ganz zu vermeidenden Fehlerquellen beeinträchtigen könnte. Es wird sicher eine ganze Anzahl von Armen geben, bei denen das Gewichtsverhältniss dem Werthe 1,05 näher kommt als dem Werthe 1,07, ja es giebt sogar solche, bei denen das Verhältniss noch etwas geringer ist. Man vergleiche nur die bei Gelegenheit früherer Arbeiten ausgeführten Gewichtsbestimmungen.

Um das erforderliche Gewicht herauszubringen, wurden in die beiden Messingröhren mehrere Bleicylinder eingesteckt. Am unteren offenen Ende der Unterarmröhre ist in der Figur auf Tafel I der Boden eines solchen Bleicylinders im Innern der Röhre zu erkennen. Diese Art der Vervollständigung des Gewichts hatte den Vortheil,

dass man durch geeignete Vertheilung der verschiedenen Bleicylinder innerhalb der Messingröhre nicht nur den Schwerpunkt in jedem Armabschnitte an die richtige Stelle bringen konnte, sondern dass man auch in der Lage war, gleichzeitig die Vertheilung der Massen um den Schwerpunkt, so weit sie mechanisch in Betracht kommt, den Verhältnissen am menschlichen Arme entsprechend zu gestalten.

Die richtige Lage des Schwerpunktes innerhalb eines jeden der beiden Armabschnitte controlirt man durch Aufhängen der ganzen Röhre an einem um dieselbe geschlungenen Faden. Die Ebene, welche die Fadenschlinge bestimmt, wird dann den Schwerpunkt enthalten, wenn die Röhre in horizontaler Lage stehen bleibt.

Hat man es durch Verschieben der Bleicylinder dahin gebracht, dass beide Einzelschwerpunkte sich an der richtigen Stelle befinden, so braucht damit noch nicht die richtige Massenvertheilung innerhalb der beiden Abschnitte des Apparates erzielt zu sein. Dies geht schon daraus hervor, dass der Schwerpunkt eines jeden Abschnittes seine Lage beibehalten kann, wenn man alle auf beiden Seiten desselben vertheilten Bleicylinder innerhalb der Röhre entweder dem Schwerpunkte in geeigneter Weise nähert, oder von demselben entfernt; dies lehrt ferner auch ein Blick auf die vier Figuren 2 bis 5. Von der Möglichkeit noch weiterer Verschiebung der Bleicylinder hat man nun Gebrauch zu machen, um die beiden Abschnitte des Apparates den Abschnitten des als Vorbild verwendeten Armes mechanisch äquivalent zu gestalten. Das letztere ist erst dann erreicht, wenn nicht nur der Schwerpunkt an seine richtige Stelle gebracht worden ist, sondern wenn auch ein jeder der beiden Theile des Apparates dieselben Trägheitsradien in Bezug auf entsprechende Axen durch den Schwerpunkt besitzt. Dass letzteres der Fall ist, erkennt man daran, dass ein jeder der beiden Theile, als Pendel um die der Ellbogenaxe parallele Schultergelenkaxe, bezüglich um die Ellbogenaxe selbst schwingend, dieselbe Schwingungsdauer aufweist, wie der um die entsprechende Schultergelenkaxe pendelnde Oberarm, bezüglich das in der Ellbogenaxe drehbar aufgehängte System Unterarm plus Hand.

In Hinsicht auf die Dimensionen des als Vorbild verwendeten Armes kommt dem Oberarm bei dieser Schwingungsart eine Schwingungsdauer von $0{,}45^{s}$ und dem System Unterarm plus Hand

eine solche von 0,52s[1]) zu. Diese Schwingungsdauern waren für die beiden Theile des Apparates durch geeignete Verschiebung der Bleicylinder zunächst auch genau erreicht worden. Die später noch angebrachten Nebentheile haben beide Schwingungsdauern um 0,01s vergrössert, so dass dieselben 0,46s und 0,53s betrugen. Gleichzeitig stellte sich auch erst hinterher eine Verrückung des Oberarmschwerpunktes heraus; derselbe war am Apparat nicht mehr 13,6 cm, sondern 14,8 cm vom Schultergelenkmittelpunkt entfernt. Der Schwerpunkt von Unterarm plus Hand hatte dagegen seine richtige Lage beibehalten. Diese kleinen Abweichungen, welche zuletzt nicht mehr gut zu machen waren, bringen keine sehr grossen Aenderungen in dem mechanischen Verhalten der beiden Theile des Apparates hervor. Die Verrückung des Oberarmschwerpunktes im Sinne einer grösseren Entfernung desselben vom Schultergelenkmittelpunkte wird vielleicht die grösste Störung verursachen; von vornherein kann man sich sagen, dass ihr Einfluss sich darin geltend machen wird, dass die Bewegung des Oberarms im Schultergelenk durchweg etwas geringer am künstlichen Gliedersystem ausfällt, als es bei richtiger Lage des Oberarmschwerpunktes der Fall sein würde.

So waren denn in dem künstlichen Gliedersystem die mechanisch in Betracht kommenden Verhältnisse der beiden Armabschnitte fast genau copirt, und es musste sich daher dieses System gegenüber angreifenden inneren und äusseren Kräften so wie der in zwei Abschnitte zerlegte menschliche Arm selbst verhalten.

Die beiden Theile waren nun zunächst durch ein dem Ellbogengelenk entsprechendes Charniergelenk beweglich mit einander und das obere Ende des Oberarmtheiles mit einer im Raume festen Axe, welche die der Ellbogenaxe parallele Schultergelenkaxe darstellen sollte, drehbar verbunden. Um den Einfluss der Schwere auf die Bewegungen des künstlichen Gliedersystems auszuschliessen, war sowohl in der Verlängerung der Ellbogenaxe, als auch am vorderen Ende der Unterarmröhre je ein zugespitzter Elfenbeinstift befestigt, mit denen das Gliedersystem auf einer horizontalen Spiegelglasplatte so gleiten konnte, dass bei allen Bewegungen die beiden Gelenkaxen vertical und die Längsaxen der beiden Glieder horizontal gerichtet

1) Aus den in der Arbeit »Über die Trägheitsmomente« niedergelegten Schwingungsdauern unter Berücksichtigung der veränderten Dimensionen des Armes abgeleitet.

blieben. Der Rahmen der Glasplatte enthielt die feste Axe im Schultergelenk.

Bei der Construction der Gelenkverbindungen wurde vor allen Dingen angestrebt, die Axenreibung auf ein Minimum zu reduciren. Zu diesem Zwecke wurde eine jede der beiden stählernen Axen in zwei Theile zerlegt. Der untere Theil der Axe wurde oben zugespitzt. Auf der Spitze desselben stand das Glied, welches das aus Stahl gefertigte hohlcylindrische Axenlager trug, mit der ebenen unteren Fläche einer in das Axenlager eingelassenen Achatlinse auf. Dieser untere Theil der Axe war ausserdem an einer dicht unterhalb der Spitze befindlichen Stelle verdickt worden, damit die Axe nur längs einer Kreislinie das Lager berührte. Der obere Theil einer jeden Axe hatte nur den Zweck, eine sichere Führung zu ermöglichen; er ragte deshalb nur ein Stück von oben in das Axenlager hinein. Bei beiden Gelenken war das Axenlager am Oberarmglied angebracht worden. Daher wurde die Axe des Ellbogengelenks mit dem gabelförmig eingeschnittenen Ellbogenende des Unterarmgliedes fest verbunden, während die fixirte Axe des Schultergelenks an einem ebenfalls gabelförmig ausgeschnittenen Stativ angebracht war, welches auf dem Rahmen der Glastafel fest aufsass. In der Verlängerung des unteren Theiles der Ellbogenaxe befand sich das eine Elfenbeinstiftchen, mit welchem der Apparat in der Mitte auf der Glastafel aufsass. Dieses Stiftchen konnte, ebenso wie das andere Stiftchen am vorderen Ende der Unterarmröhre, innerhalb geringer Grenzen höher und tiefer gestellt werden, um ein genau horizontales Einstellen des ganzen Apparates zu ermöglichen.

Um jeden seitlichen Druck zu vermeiden, welchen die beiden Gelenkaxen erleiden müssten, wenn das eine der beiden Elfenbeinstiftchen sich mehr abgenutzt hätte als das andere, oder wenn die Glastafel an manchen Stellen geringe Unebenheiten aufweisen würde, war ein jeder der beiden Theile des Apparates in der Nähe des proximalen Endes durch je ein Zwischengelenk mit horizontaler Axe getheilt worden. Diese Gelenke können keinen Einfluss auf die Gliederbewegung haben, da ihre Axen horizontal gerichtet sind; sie ermöglichen es aber, dass bei etwaiger Abnutzung der Elfenbeinstiftchen oder bei vorhandenen Unebenheiten der Glasplatte das distale Ende eines jeden Gliedes sich etwas senken oder erheben

kann, ohne einen merklichen seitlichen Druck auf die verticalen Gelenkaxen zu verursachen.

Am Stativ für die Schultergelenkaxe war ein horizontaler, zur Axe concentrischer, getheilter Kreis und am Oberarmglied ein zugehöriger Zeiger angebracht worden, so dass man die Winkelstellung der Oberarmlängsaxe ablesen konnte. In entsprechender Weise findet sich am Ellbogengelenk Theilkreis und Zeiger vor, um eine Ablesung des Beugungswinkels im Ellbogengelenk zu ermöglichen.

Um die Gummifäden, welche die Muskeln vertreten sollten, bequem befestigen zu können und auch eine Aenderung der Insertionsstellen leicht zu ermöglichen, waren die beiden Messingröhren mit verticalen Löchern im Abstand von 1 cm durchsetzt, und waren ausserdem über jede der beiden Messingröhren mehrere Messingringe mit seitlichen Häkchen geschoben. Diese Ringe enthielten oben ebenfalls ein kleines Loch und konnten an zahlreichen Stellen dadurch fixirt werden, dass durch dieses Loch und eins der vielen verticalen Löcher der Messingröhre ein Stift eingesteckt wurde, so wie es aus der Figur auf Tafel I deutlich zu ersehen ist.

Um die auf der Streckseite des Ellbogengelenks hinziehenden Muskeln in genügender Entfernung von der Gelenkaxe zu halten, so wie es am Arme des Menschen das Olecranon besorgt, wurde an den Ellbogenenden der beiden Röhren je ein Metallansatz angebracht, über welchen sich der künstliche Streckmuskel auszuspannen gezwungen war. In der Figur auf Tafel I sieht man einen Bindfaden über die beiden Ansätze hinweggeführt.

Ferner findet sich sowohl auf der Beugeseite als auf der Streckseite des Apparates eine Vorrichtung zum Arretiren der Bewegung angebracht. Dieselbe besteht auf jeder Seite aus einer mit Thon gefüllten Messingpfanne und einem kreisförmig gebogenen Metallstift; die erstere befindet sich beiderseits am Oberarmtheil, der letztere an der Unterarmröhre befestigt. Wenn nun die Beugung oder Streckung im Ellbogengelenk weit genug vorgeschritten ist, so fährt der Stift in den Thon hinein und bringt dadurch die Gliederbewegung zum Stillstand. Auf der Streckseite ist sowohl die Thonpfanne als auch der Stift auf einen Metallring aufgesetzt, durch welchen der Streckmuskel hindurchgeführt wird. Diese ganze Einrichtung ist so

deutlich aus der Figur auf Tafel I zu erkennen, dass eine eingehendere Beschreibung derselben überflüssig erscheint.

Endlich ist am distalen Ende der Unterarmröhre ein kleiner Teller aufgesetzt (auf Tafel III und V sichtbar), auf welchen cylindrisch geformte Bleigewichte aufgesetzt werden können. Damit diese Gewichte bei der Bewegung nicht von dem Teller heruntergleiten, lässt sich in der Mitte des letzteren ein vertical gestellter Stahlstab aufschrauben, über welchen die Gewichte geschoben werden; zu diesem Zwecke sind dieselben in der Mitte durchlöchert. In der Figur auf Tafel I sieht man den Stahlstab aufgeschraubt und zwei Bleigewichte aufgesetzt. Das Gewinde für den Stahlstab befindet sich in einer Entfernung von 34,6 cm von der Ellbogenaxe; dies entspricht der Stelle, an welcher sich der Schwerpunkt einer in der Hand gehaltenen Masse befindet. Man kann daher durch diese Vorrichtung die Bewegung des Gliedersystems bei beliebiger Belastung der Hand nachahmen.

Um die eintretende Bewegung des Gliedersystems in ihrem ganzen Verlaufe auf photographischem Wege registriren zu können, wurden, wie bei der Untersuchung des menschlichen Ganges[1]), mit den Abschnitten des Gliedersystems Geissler'sche Röhren verbunden. Dieselben wurden mittelst kleiner Halter so auf die beiden Metallröhren aufgesetzt, dass sie in einigem Abstande parallel den Längsaxen der beiden Theile des Apparates verliefen. Die Halter waren aus Hartgummi hergestellt, damit der elektrische Strom nicht seinen Weg durch die Metalltheile des Apparates nehmen konnte. Aus der Figur auf Tafel I erkennt man, dass am Oberarmtheil eine einzige, dagegen am Unterarmtheil zwei solcher Geissler'scher Röhren angebracht worden sind. Ursprünglich war beabsichtigt, auch für den Unterarm eine einzige lange Röhre zu verwenden. Es musste aber davon Abstand genommen werden, da der für die Versuche zur Verfügung stehende Ruhmkorff'sche Inductor nicht Ströme von so grosser Spannung erzeugte, wie sie zum starken Erleuchten zweier so langer Geissler'scher Röhren erforderlich sind. Das Licht der Röhren muss aber sehr intensiv sein, damit bei der kurzen Dauer des elektrischen Funkens ein Eindruck auf der empfindlichen Platte des photographischen Apparates hervorgerufen wird. Die Köpfe der

---

1) Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Kl., Bd. XXI, Nr. IV.

Geissler'schen Röhren waren mit Asphaltlack überkleidet worden, um das in denselben entstehende Licht unsichtbar zu machen und nur eine einzige helle Linie zu haben; ausserdem waren sowohl an der Geissler'schen Röhre des Oberarms, als an der längeren des Unterarms die Stellen, welche in die Verlängerung der Gelenkaxe fielen, durch einen Asphaltring von dem übrigen Theile der hellen Linie abgeschnürt worden. Das kleinere Röhrchen am Unterarmtheil befand sich gerade senkrecht über dem Handgelenk; bei diesem war umgedreht die dem Handgelenkmittelpunkte entsprechende Stelle durch einen Asphaltring hervorgehoben worden, so dass auf den Bildern der Mittelpunkt des Handgelenks sich als Unterbrechung in der kleinen hellen Linie markirt. Die drei Geissler'schen Röhren wurden nun durch dünne Leitungsschnuren so unter einander und mit den beiden Polklemmen des Inductionsapparates verbunden, dass der secundäre Strom des letzteren gezwungen wurde, durch alle drei Röhren hindurchzugehen. Die Unterbrechungen des primären Stromes im Ruhmkorff'schen Apparat wurden wieder, wie bei der früheren Untersuchung über den Gang, durch eine Stimmgabel regulirt. Die Schwingungszahl dieser Stimmgabel war aber viel grösser wie die der früher verwendeten Gabel; denn die Gabel führte ungefähr 100 Schwingungen in der Secunde aus. Da für die vorliegenden Versuche die absolute Grösse des Zeitintervalls zwischen zwei auf einander folgenden Unterbrechungen nicht in Betracht kam, so wurde die Schwingungszahl der Stimmgabel nicht genauer ermittelt.

Die Contraction eines auf das Gliedersystem wirkenden Muskels wurde durch die elastische Zusammenziehung eines über seine normale Länge ausgedehnten Gummistranges nachgeahmt. In der Figur auf Tafel I sieht man einen derartigen Gummistrang auf der Beugeseite des Ellbogengelenks zwischen Oberarm und Unterarm ausgespannt. Durch einen gleichfalls zwischen beiden Gliedern ausgespannten, aber auf der Streckseite verlaufenden Faden ist der elastischen Kraft des künstlichen Muskels zunächst das Gleichgewicht gehalten. Sobald dieser Faden gelöst wird, zieht sich der Gummistrang auf seine normale Länge zusammen und wirkt dabei auf das Gliedersystem in genau derselben Weise bewegend ein, wie ein zwischen denselben Insertionspunkten ausgespannter Muskel bei seiner Contraction. Um beim Lösen des auf der Streckseite verlaufenden Fadens keine fremde

Kraftwirkung auf das Gliedersystem auszuüben, welche die Bewegung beeeinflussen würde, empfiehlt es sich, den Faden nicht zu durchschneiden, sondern abzubrennen. Es wurde zu diesem Zwecke bei allen entscheidenden Versuchen über den Faden noch besonders ein kleiner Papierstreifen gehängt und zunächst dieser angebrannt, damit man im Moment des Eintritts der Bewegung die Hand schon lange wieder vom Apparat entfernt haben konnte.

Um die Wirkung eines Streckmuskels nachzuahmen, hat man nur den Gummistrang auf der Streckseite über die Metallansätze am Ellbogen hinweg, und dafür den Faden auf der Beugeseite auszuspannen.

Hat man dafür Sorge getragen, dass die Glastafel genau horizontal liegt, so hat man auf diese Weise ganz rein die alleinige Kraftäusserung eines Beuge- oder Streckmuskels nachgeahmt. Die einzige Voraussetzung, welche dabei gemacht werden muss, ist die, dass die Spannung im Muskel sich in gleicher Weise bei der Contraction ändert, wie die elastische Spannung im Gummistrang bei zunehmender Verkürzung. Da nun der Spannungswechsel im Verlaufe der Contraction eines Muskels je nach der Innervation ein sehr verschiedener sein kann, so ist man so wie so zu einer bestimmten Voraussetzung über denselben gezwungen, wenn man das Problem greifbar machen will.

Bei den Versuchen, welche zunächst mit dem Apparat angestellt wurden, kamen vier künstliche Muskeln zur Verwendung. Drei derselben, welche mit *A*, *B* und *C* bezeichnet sein sollen, waren aus je drei dicken Gummifäden von quadratischem Querschnitt mit 4 Millimeter Seitenlänge zusammengefügt, bei dem vierten Muskel, welcher den Buchstaben *D* tragen soll, waren fünf solcher Gummifäden mit einander verbunden. Im unbelasteten Zustande besass Muskel *A* eine Länge von 15,8 cm, Muskel *B* eine solche von 12,8 cm, Muskel *C* die Länge von 11,2 cm und Muskel *D* eine solche von 17,3 cm. Diese Längen stellen die Entfernung der äussersten Enden der beiden Bindfadenschlingen dar, mit welchen ein jeder Muskel an den seitlichen Häkchen der über die beiden Metallröhren geschobenen Messingringe (Figur auf Tafel I) befestigt wurde. Fasst man nur den elastischen Theil der Muskeln ins Auge, so kommen bei den Muskeln *A* und *B* je 4 cm, beim Muskel *C* 4,2 cm und beim Muskel *D* 7 cm in Abzug. Denkt man alle vier Gummistränge auf die gleiche Länge,

etwa 30 cm, ausgedehnt, so muss von den drei gleich dicken Muskeln *A*, *B* und *C* der letztere infolge seiner kleineren Normallänge eine grössere Spannung besitzen als der zweite, und dieser wieder eine grössere als der erste. Der vierte Muskel *D* war dicker als die drei anderen. Daher musste bei diesem die Spannung ungleich schneller mit der Verlängerung zunehmen wie bei den anderen. Trotzdem die normale Länge von *D* die grösste von allen war, so erreichte die Spannung bei der Verlängerung auf 30 cm doch nahezu dieselbe Grösse wie die des kleinsten Muskels *C*.

Um einen genauen Einblick in die Spannungen zu gewinnen, welche die vier künstlichen Muskeln bei verschiedenen Längen besitzen, sind Messungen über die Beziehung zwischen der Belastung des Gummistrangs und der zugehörigen Länge angestellt worden. Es ergaben sich die folgenden zusammengehörigen Werthe:

Länge der vier künstlichen Muskeln bei verschiedener Belastung.

Muskel A.		Muskel B.		Muskel C.		Muskel D.	
Belastung in Gramm	Länge in cm	Belastung in Gramm	Länge in cm	Belastung in Gramm	Länge in cm	Belastung in Gramm	Länge in cm
0	15,8	0	12,8	0	11,2	0	17,3
250	16,3	250	13,2	250	11,5	250	17,6
500	17,0	500	13,8	500	12,0	500	18,1
750	17,9	750	14,4	750	12,5	750	18,5
1000	18,8	1000	15,1	1000	13,0	1000	19,0
1250	19,8	1250	15,9	1250	13,6	1250	19,4
1500	21,0	1500	16,7	1500	14,3	1500	19,85
1750	22,5	1750	17,6	1750	15,0	1750	20,3
2000	23,9	2000	18,7	2000	15,8	2000	20,85
2250	25,8	2250	20,0	2250	16,8	2250	21,4
2500	27,7	2500	21,3	2500	17,8	2500	22,0
2750	29,8	2750	22,8	2750	19,0	2750	22,6
3000	32,0	3000	24,4	3000	20,2	3000	23,3
3250	34,4	3250	26,1	3250	21,5	3250	24,1
		3500	27,7	3500	22,9	3500	25,0
		3750	29,4	3750	24,2	3750	25,8
		4000	31,0	4000	25,5	4000	26,8
		4250	32,5	4250	26,8	4250	27,8
		4500	33,9	4500	28,0	4500	28,9
				4750	29,1	4750	30,0
				5000	30,2	5000	31,1
				5250	31,4	5250	32,3
				5500	32,3	5500	33,5
				5750	33,2	5750	34,8
				6000	34,1		

Die Belastung, welche nothwendig ist, um den Gummistrang auf eine gewisse Länge auszudehnen, drückt gleichzeitig die Spannung aus, welche der Gummistrang bei dieser Länge besitzt, oder mit anderen Worten, die elastische Kraft, mit welcher sich derselbe zu contrahiren strebt. Die Zahlen der ersten Reihe in jeder der vier Tabellen geben daher direct die Spannungswerthe der vier verwendeten Muskeln bei der daneben stehenden Länge an.

Um einerseits eine deutliche Anschauung von der Aenderung der Spannung bei zu- oder abnehmender Länge zu gewinnen und andererseits in der Lage zu sein, auch die Spannung für jede andere, nicht in der Tabelle verzeichnete, Muskellänge anzugeben, empfiehlt es sich, die Dehnungscurven zu construiren, welche den vier Gummisträngen entsprechen. Man erhält dieselben, indem man als Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Belastungs- bezüglich Spannungsgrössen und als zugehörige Ordinaten die entsprechenden Längen der Gummistränge verwendet. Dies ist auf Tafel II ausgeführt worden. Die Figuren geben die vier Dehnungscurven in $\frac{1}{3}$ natürlicher Grösse, wenn man bei den Abscissen eine Belastung von 100 g durch eine Länge von 1 cm dargestellt denkt. Die Ordinaten sind nach unten positiv genommen. Betrachtet man die Curven von der Seite, bei welcher die Coordinatenaxe der Muskellängen horizontal verläuft, so dass also gewissermassen die Muskellängen die Absissen und die Spannungsgrössen die Ordinaten darstellen, so erkennt man, dass dieselben bis zu einer gewissen Grenze in alphabetischer Reihenfolge immer steiler werden. Daraus geht hervor, dass der Reihe nach bei den vier Muskeln zu gleicher Längenänderung eine immer grössere Spannungszunahme gehört. Bei sehr grosser Länge wird dieses Verhältniss, wenigstens was die Muskeln *C* und *D* anlangt, geändert. Ueber 30 cm Länge zeigt nämlich die zum Muskel *C* gehörende Dehnungscurve einen steileren Verlauf als die für den Muskel *D*. Da bei den mit dem künstlichen Gliedersystem angestellten Versuchen eine Muskellänge von über 30 cm fast nicht benutzt wird, so kommt diese Abweichung von dem angedeuteten Verhalten der vier Muskeln hier nicht in Betracht.

Die vier Dehnungscurven geben nun das Mittel an die Hand, sich bei jedem Versuch über die Kräfte zu unterrichten, mit welchen in jedem Augenblick der Gliederbewegung die Muskeln auf die beiden Theile des Apparates gewirkt haben. Man braucht zu diesem Zwecke

nur die Längen zu messen, welche bei den aufeinander folgenden Bewegungsphasen die Muskeln infolge ihrer Art der Insertion besessen haben. Man wird daher in allen den Fällen diese Dehnungscurven zu Rathe ziehen müssen, bei denen der numerische Werth der Spannung des Muskels in Frage kommt. Sie lehren nicht nur manche Erscheinungen richtig beurtheilen, welche sich im Verlaufe der gegenwärtigen Untersuchung bei den Gliederbewegungen zeigen werden, sondern sie bilden auch eine nothwendige Unterlage für manche Untersuchungen, welche die in dieser Arbeit registrirten Gliederbewegungen zum Ausgangspunkt nehmen, aber über die gegenwärtigen Ziele hinausgehen wollen. —

Nachdem die einzelnen Theile des künstlichen Gliedersystems ausführlich beschrieben worden sind, sollen nunmehr die Versuche mitgetheilt werden, welche mit dem Apparat angestellt wurden:

1. Es wurde irgend einer der vier Muskeln zwischen zwei Punkten des Oberarms und Unterarms auf der Beugeseite des Ellbogengelenks ausgespannt. Darauf wurde das Gliedersystem in die äusserste Streckstellung des Ellbogengelenks übergeführt und in dieser Lage durch einen auf der Streckseite zwischen zwei Punkten des Ober- und Unterarms ausgespannten Faden arretirt. Brannte man nun den Faden ab, so zog sich der stark ausgedehnte Gummistrang zusammen, und es trat dabei nicht allein Beugung im Ellbogengelenk, sondern auch sehr ausgiebige Bewegung im Schultergelenk im Sinne einer Rückwärtsdrehung oder Streckung des Oberarms ein. Diese Erscheinung zeigte sich bei jeder beliebigen Anordnung der beiden Muskelinsertionen und für jeden der vier Muskeln. Um eine deutliche Vorstellung von der Grösse der beiden Gelenkbewegungen zu vermitteln, ist auf Tafel III in Figur 1 der Apparat vor der Bewegung (Streckstellung) und nach der Entspannung des künstlichen Muskels auf photographischem Wege aufgezeichnet worden. Das Bild wurde auf folgende Weise hergestellt. Zunächst wurde das Gliedersystem in der durch den Faden arretirten Streckstellung photographirt. Darauf wurde das Objectiv des photographischen Apparates verdeckt und der Faden in der oben beschriebenen Weise abgebrannt, so dass jede Beeinflussung der eintretenden Gliederbewegung von aussen ausgeschlossen war. Nachdem der Muskel

entspannt und das Gliedersystem in der anderen Extremstellung zur Ruhe gekommen war, wurde die photographische Camera wieder geöffnet und dieselbe Platte noch einmal exponirt. Nach einigen Vorversuchen wurde es erreicht, dass trotz der zweifachen Exposition derselben Platte beide Bilder ziemlich scharf und nur an der Durchkreuzungsstelle der beiden Haltungen des Gliedersystems etwas undeutlich wurden, wie Figur 1 auf Tafel III erkennen lässt.

Das Bild bestätigt, was vorher als Resultat des Versuches mitgetheilt worden ist: Es ist eine starke Rückwärtsdrehung im Schultergelenk eingetreten. Damit ist also experimentell bewiesen, dass ein eingelenkiger Beugemuskel des Ellbogengelenks nicht allein auf das Ellbogengelenk wirkt, über welches er hinwegzieht, sondern auch in beträchtlicher Weise auf das Schultergelenk, über welches er nicht hinwegzieht.

2. Es wurde ein Muskel über die Ansätze am Ellbogengelenk hinweg als Streckmuskel des Ellbogengelenks ausgespannt. Darauf wurde das Gliedersystem in die extreme Beugestellung übergeführt und in dieser Haltung durch einen auf der Beugeseite ausgespannten Faden arretirt. Brannte man jetzt den Faden ab, so wurde nicht nur der Unterarm im Ellbogengelenk gestreckt, sondern gleichzeitig auch der Oberarm im Schultergelenk nach vorn gedreht, bezüglich gebeugt. Auch diese Erscheinung stellte sich stets ein, gleichgültig, welchen Muskel man verwendete, gleichgültig, an welchen Punkten des Ober- und Unterarms man denselben befestigte. Auch diese Bewegung ist in ganz entsprechender Weise, wie die unter der Wirkung eines Beugemuskels eintretende, auf photographischem Wege durch die Anfangs- und Endstellung abgebildet und das Bild auf Tafel V in Figur 1 wiedergegeben worden. Damit ist experimentell erwiesen, dass auch ein eingelenkiger Streckmuskel des Ellbogengelenks nicht allein auf das Ellbogengelenk wirkt, über welches er hinwegzieht, sondern auch in beträchtlicher Weise auf das Schultergelenk, über welches er nicht hinwegzieht.

Der eingelenkige Beugemuskel des Ellbogengelenks ist zugleich Streckmuskel des Schultergelenks, während der eingelenkige Streckmuskel des Ellbogengelenks zugleich einen Beugemuskel des Schultergelenks darstellt.

3. Nachdem die Thatsache der Gelenkbewegung im Schultergelenk erwiesen war, wurde nunmehr dazu übergegangen, die verhältnissmässigen Grössen der beiden Gelenkbewegungen für verschiedene Ansatzweisen der einzelnen Muskeln zu messen. Der Muskel *A* wurde zunächst so als Beugemuskel befestigt, dass sein Ursprung am Oberarm 23 cm und sein Ansatz am Unterarm 8 cm von der Ellbogenaxe entfernt war. Um die Bewegung in ihrem ganzen Verlauf messend verfolgen zu können, wurde jetzt der Versuch im Dunkeln vorgenommen und bei der Gliederbewegung in der oben beschriebenen Weise der elektrische Strom eines Ruhmkorff'schen Inductors intermittirend durch die Geissler'schen Röhren hindurchgeschickt. Da die Röhren in der Secunde ungefähr 100 mal aufleuchteten, so wurden trotz des schnellen Uebergangs des Gliedersystems aus einer extremen Stellung in die andere doch an 50 Zwischenstellungen durch den während der Bewegung geöffneten photographischen Apparat registrirt. Auf diese Weise ist Figur 2 auf Tafel III entstanden. Der helle Fleck oberhalb der Spitze, in welcher die Figur unten ausläuft, lässt die Stelle erkennen, an welcher der Faden abgebrannt worden ist. Die photographische Camera wurde einige Zeit vor dem Durchbrennen des Fadens geöffnet und auch erst einige Zeit nach Beendigung der Gliederbewegung geschlossen. Daher häufen sich sowohl in der Anfangsstellung als auch in der Endstellung die Lichteindrücke und bringen die äusserst starke Markirung der beiden extremen Stellungen auf der Photographie hervor. Man kann nun an dem Bilde den ganzen Verlauf der Gliederbewegung genau verfolgen. Das Ellbogengelenk ist durch einen hellen Punkt an der längeren Geissler'schen Röhre des Unterarms und das Handgelenk durch eine dunkle Stelle in dem kleinen Geissler'schen Röhrchen des Unterarms kenntlich gemacht. Das Schultergelenk ist ebenfalls durch einen hellen Punkt dargestellt, welcher bei allen Bewegungen seine Lage beibehält. Das Ellbogengelenk bewegt sich beim Uebergang aus der Streckstellung des Gliedersystems in die äusserste Beugestellung auf einem Kreise um den Schultergelenkmittelpunkt im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers. Das Handgelenk bewegt sich in dem Bilde zunächst etwas nach links und dann sehr bald nach aufwärts, indem es allmählich die Richtung auf das Schultergelenk zu einschlägt. Es ist zu beachten, dass die helle Linie, welche nach rechts unten die Figur begrenzt, nicht

die Bewegungsbahn eines bestimmten Punktes, sondern eine Curve ist, welche von den aufeinanderfolgenden Lagen der Unterarmlängsaxe eingehüllt wird. Die Oberarmlängsaxe dreht sich um den festen Schultergelenkmittelpunkt umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr. Die Unterarmlängsaxe dreht sich dagegen um das Ellbogengelenk im Sinne des Uhrzeigers, während gleichzeitig das Ellbogengelenk selbst auf seiner Kreisbahn fortschreitet. Beachtet man dies, so lassen sich leicht die zusammengehörigen Stellungen von Oberarmlängsaxe und Unterarmlängsaxe auffinden. Man wird dabei in Figur 2 auf Tafel III noch besonders durch den Umstand unterstützt, dass einige Bewegungsphasen etwas dunkler im Bilde ausgefallen sind, so dass man schon von Weitem an diesen Stellen die Haltung des ganzen Armes erkennen kann. Im Uebrigen braucht man nur ein Lineal an die Bilder der Unterarmlängsaxe anzulegen, wenn man die zusammengehörigen Lagen des Ellbogen- und Handgelenks sicher auffinden will.

Mit Hilfe eines Winkeltransporteurs misst man nun zunächst an Figur 2, dass der Winkel zwischen den Längsaxen der beiden Armabschnitte, welcher im Anfang nahezu 180° betrug, während der Bewegung auf 36° herabgegangen ist. Es hat demnach eine Beugung im Ellbogengelenk um 144° stattgefunden. Ferner constatirt man, dass die Oberarmlängsaxe sich gleichzeitig um einen Winkel von 44° gedreht hat.

Um zu untersuchen, welchen Einfluss die Lage der Muskelinsertionen und die Grösse der Muskelspannung auf die Gliederbewegung besitzt, wurden sowohl die Insertionsstellen des Muskels in zahlreichen Versuchen geändert, als auch die Muskeln selbst ausgewechselt. Dabei ergab sich das überraschende Resultat, dass weder durch andere Muskelinsertionen noch durch andere Muskelspannungen die Gesammtgrösse der Drehung im Schultergelenk, welche den Uebergang aus der Streckstellung in die extreme Beugestellung des Ellbogengelenks begleitet, geändert werden konnte. Immer wurde der Oberarm um nahezu 43° in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers gedreht, wenn das Ellbogengelenk aus der Streckstellung um rund 145° gebeugt wurde, man mochte einen Muskel genommen haben, welchen man wollte, man mochte die Muskelinsertionen in der extremsten Weise geändert haben. Es zeigte sich wohl einmal eine Abweichung bis etwa 2° nach oben oder

unten von diesem Winkel. Solche Abweichungen traten aber ebensowohl ein, wenn man einen Versuch unter genau denselben Verhältnissen wiederholte, als wenn man die Versuchsbedingungen total geändert hatte; dieselben waren daher nur Fehlerquellen des Versuchs zuzuschreiben. Diese Erscheinung soll durch die Figuren 3, 4 und 5 auf Tafel III und Figur 1 auf Tafel IV noch besonders veranschaulicht werden:

Figur 3 auf Tafel III entspricht einer Gliederbewegung, welche mit Hilfe des Muskels *A* erzeugt wurde, nachdem die Entfernungen der Insertionsstellen von der Ellbogenaxe vertauscht worden waren. Es besass also dabei der Ursprung am Oberarm die Entfernung von 8 cm, dagegen der Ansatz am Unterarm die Entfernung von 23 cm von der Axe des Ellbogengelenks. Die Messung des Winkels zeigt, dass der Unterarm im Ellbogengelenk wieder um abgerundet 144° gebeugt, dagegen der Oberarm im Schultergelenk um 43° nach rückwärts gedreht war.

Figur 4 auf Tafel III ist ebenfalls durch die Contraction des Muskels *A* erzeugt. Die Insertionsstellen desselben besassen aber jetzt übereinstimmend eine Entfernung von 16 cm von der Ellbogenaxe. Das Resultat ist genau dasselbe wie bei Figur 3: auf 144° Beugung im Ellbogengelenk kommen 43° Streckung im Schultergelenk.

Bei Figur 5 auf Tafel III ist der Muskel *A* mit *B* vertauscht worden. Die Insertionsstellen sind dieselben wie bei Figur 2, d. h. also der Ursprung ist 23 cm und der Ansatz 8 cm von der Ellbogenaxe entfernt. Es ergiebt sich hierbei 145° Beugung des Ellbogengelenks und 43° Streckung des Schultergelenks, also das gleiche Resultat wie bisher.

Figur 1 auf Tafel IV entspricht einer Gliederbewegung, welche durch die Contraction des kleinsten Muskels, der oben mit *C* bezeichnet wurde, hervorgerufen worden ist. Die Insertionsstellen sind dieselben wie bei Figur 2 und 5 auf Tafel III. Die Winkelmessung ergiebt, dass der Unterarm um 149° im Ellbogengelenk gebeugt und gleichzeitig der Oberarm um 41° im Schultergelenk gestreckt worden ist. Dies ist in Anbetracht der unvermeidlichen Fehlerquellen also wieder das gleiche Resultat.

Damit ist experimentell bewiesen, dass bei der Beugung des Unterarms aus der Streckstellung des Ellbogengelenkes in die extreme Beugestellung infolge der allei-

nigen Wirkung eines nur über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Beugemuskels der Oberarm stets um denselben Winkel im Schultergelenk gestreckt wird, ganz unabhängig von der Lage der Insertionsstellen und auch unabhängig von der Grösse der Muskelspannung. Bei dem zum Versuch herangezogenen Arm betrug diese Streckung abgerundet 43°.

4. Die entsprechenden Versuche wurden für die Streckbewegung des Ellbogengelenks angestellt. Hierbei zeigte sich nun von vornherein bei Weitem nicht die Constanz der Drehung im Schultergelenk wie bei der Beugebewegung. Es zeigten sich bei verschiedenen Versuchen Unterschiede von 5° bis zu 10°. Bei genauer Untersuchung ergab sich nun aber, dass selbst diese grossen Unterschiede nicht zu dem Schlusse berechtigten, dass mit Aenderung der Insertionsstellen und der Spannung des Muskels nothwendig Aenderung der Drehung im Schultergelenk verbunden sei. Es stellte sich nämlich heraus, dass unter genau denselben Versuchsbedingungen schon solche Unterschiede von 5° bis 10° auftraten, so dass also die Fehlerquellen sich für die Streckbewegung unverhältnissmässig vergrössert haben mussten. Vermuthlich lag diese Thatsache in dem Baue der dem Olecranon entsprechenden Metallansatzstücke. Die letzteren stehen nämlich während der Contraction eines Streckmuskels unter sehr hohem Druck und geben federnd diesem Drucke nach, wenn sie nicht ganz abbrechen, wie es mehrmals passirt war. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass während der Bewegung zuweilen die beiden Ansatzstücke an einander schleifen und dadurch starke Gelenkreibung verursachen, oder dass infolge des Druckes zu viel Reibung zwischen dem Muskel und den Metallansatzstücken stattfindet. Wenn auch diese Führung der Streckmuskeln mit der Zeit wesentlich verbessert worden ist, so war es doch schliesslich nicht mehr möglich, sie noch vollkommener zu gestalten, wenn man nicht den ganzen Apparat umgestalten wollte. Es führen daher die Versuche, welche über die Streckbewegung des Gliedersystems angestellt wurden, nicht zu so sicheren Resultaten über die Grösse der Gelenkbewegungen, wie die auf die Beugebewegung sich beziehenden. Daher sind auch weniger verschiedene Fälle auf photographischem Wege registrirt worden.

Figur 2 auf Tafel V gibt die Streckbewegung wieder, welche

Muskel *A* hervorgerufen hat, als sein Ursprung am Oberarm 8 cm und sein Ansatz am Unterarm 18 cm auf der Streckseite von der Ellbogenaxe entfernt lag. Während bei der Beugebewegung der Mittelpunkt des Ellbogengelenks sich auf seiner Kreisbahn in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers bewegte, beschreibt er jetzt, beim Uebergang aus der extremen Beugestellung in die Streckstellung, einen Kreisbogen um den Schultergelenkmittelpunkt im Sinne der Uhrzeigerdrehung. Das Handgelenk bewegt sich dabei in einer krummen Bahn nach links unten. Die Oberarmlängsaxe dreht sich wie der Uhrzeiger um den Mittelpunkt des Schultergelenks. Die Unterarmlängsaxe dreht sich dagegen jetzt in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers um den Mittelpunkt des Ellbogengelenks, während der letztere gleichzeitig auf seiner Kreisbahn wandert. Die ganze Gliederbewegung findet also in entgegengesetztem Sinne statt wie bei der Contraction eines Beugemuskels. Vergleicht man die Figur 2 auf Tafel V mit den Figuren auf Tafel III, so giebt die erstere von links unten betrachtet annähernd dasselbe Bild wie die letzteren. Ein Unterschied besteht nur insofern, als die erstere mehr zusammengedrängt erscheint, und als bei derselben die einzelnen Zwischenstellungen in entgegengesetztem Sinne für die Bewegung in Betracht kommen. (Der helle Fleck rechts oben in Figur 2 auf Tafel V ist dadurch entstanden, dass die Camera schon geöffnet war, als das brennende Streichholz dem über den Faden gelegten Papierstreifen genähert wurde. Bei den früheren Versuchen war die Camera erst kurz nach dem Entfernen des Streichholzes, aber noch vor dem Durchbrennen des Fadens geöffnet worden.)

Misst man den Winkel, so stellt sich heraus, dass der Streckung im Ellbogengelenk um 148° eine Vorwärtsdrehung oder Beugung im Schultergelenk um nur 33° entsprach. Aus theoretischen Gründen, welche im zweiten Theile dieser Arbeit noch ausführlich auseinandergesetzt werden, müsste der Betrag der Schultergelenkbeugung so gross sein, wie derjenige der Schultergelenkstreckung, welche die Beugung im Ellbogengelenk begleitet; derselbe müsste also 43° messen, wenn die Bewegung ganz ohne störende Hindernisse vor sich gegangen wäre.

Bei einem zweiten, durch Figur 3 auf Tafel V dargestellten, Versuch ist man der Wirklichkeit viel näher gekommen. Dies ist

jedenfalls dem Umstande zu verdanken, dass hierzu der stärkste Muskel, welcher oben mit *H* bezeichnet wurde, zur Verwendung gekommen war, so dass dabei die Hindernisse besser überwunden worden sind. Dieser Muskel war so auf der Streckseite ausgespannt worden, dass sein Ursprung 16 cm und sein Ansatz 10 cm von der Ellbogenaxe entfernt lag. Es ergiebt sich aus Figur 3, dass die Streckbewegung im Ellbogengelenk 144° und die gleichzeitige Beugebewegung im Schultergelenk 39° beträgt.

Wenn nun auch durch diese beiden, auf photographischem Wege wiedergegebenen, und durch zahlreiche andere Versuche mit verschiedenen Insertionsstellen und verschiedener Spannung des Muskels nicht ganz exact die Unabhängigkeit der die Streckbewegung des Ellbogengelenks begleitenden Beugung im Schultergelenk von der Ansatzweise und Contractionsart des Muskels erwiesen ist, so ist dieselbe in Anbetracht der grösseren Fehlerquellen doch sehr wahrscheinlich gemacht. Der strenge Beweis dieser Thatsache wird im zweiten Theile der Arbeit gegeben werden.

5. Weiterhin wurde nun untersucht, ob eine Aenderung in den Massenverhältnissen und der Massenvertheilung beider Armabschnitte einen Einfluss auf die Gliederbewegung haben könne. Zu diesem Zwecke wurde der Unterarm in der früher beschriebenen Weise durch ein Bleigewicht beschwert. Es wurde zunächst nur ein kleines Gewicht von 520 g aufgesetzt und der Muskel *B* wie in dem durch Figur 5 auf Tafel III dargestellten Falle zwischen zwei um 23 cm und 8 cm von der Ellbogenaxe entfernten Punkten des Ober- und Unterarms als Beugemuskel ausgespannt. Da das Gewicht des künstlichen Gliedersystems nur 2317 g betrug, während dem als Vorbild genommenen Arm ein Gesammtgewicht von 3683 g zukam, so ist eine Belastung von 520 g des künstlichen Systems gleichbedeutend mit einer Belastung von $\frac{3683}{2317} \cdot 520\ \text{g} = 827\ \text{g}$ des wirklichen Arms. Das Resultat des Versuches war überraschend: Während vorher durch keine Aenderung der Insertionsstellen oder der Muskelspannung die Gliederbewegung in andere Bahnen gezwungen werden konnte, zeigte sich jetzt ein von den früheren ziemlich abweichender Bewegungsvorgang. Der Oberarm drehte sich viel mehr nach rückwärts als vorher. Figur 2 auf Tafel IV, welche die photographische

Aufnahme dieser Bewegung darstellt, lässt dies deutlich erkennen. Der Kreisbogen, welchen das Ellbogengelenk beschreibt, ist viel ausgedehnter und die Curve, welche die Bahn des Handgelenks darstellt, nähert sich viel mehr einer geraden Linie und ist der Anfangsstellung der beiden Längsaxen viel näher gerückt. Die Winkelmessung ergiebt, dass jetzt auf eine Gesammtbeugung von 148° im Ellbogengelenk eine Streckung von 57° im Schultergelenk kommt.

Belastet man das vordere Ende des Unterarms durch ein grösseres Gewicht, so wird dadurch die Drehung im Schultergelenk noch mehr vergrössert. Dies ergab ein Versuch, bei welchem vier Bleigewichte von zusammen 2200 g auf den Teller der Unterarmröhre aufgelegt wurden und der Muskel *C* in gleicher Weise wie bei Figur 1 auf Tafel IV, also mit den Entfernungen 23 cm und 8 cm der Insertionspunkte von der Ellbogenaxe, als Beugemuskel ausgespannt war. Der Belastung des künstlichen Systems um 2200 g entspricht eine solche des Armes von $\frac{3683}{2317} \cdot 2200 \text{ g} = 3497 \text{ g}$. Figur 3 auf Tafel IV giebt das photographische Abbild dieses Versuches. Zu 148° Gesammtbeugung im Ellbogengelenk gehörte jetzt eine Streckung von 74° im Schultergelenk. Der Drehungswinkel im Schultergelenk war also gerade halb so gross wie der Drehungswinkel im Ellbogengelenk. Belastet man die Hand noch mehr, so wird zwar immer noch der Drehungswinkel im Schultergelenk etwas vergrössert, aber allmählich immer weniger und weniger. Man erkennt zwar deutlich, dass die ganze Drehung einem Maximum zustrebt, welches bei unendlich grosser Belastung eintreten würde, man sieht aber auch, dass man mit 2200 g dem Maximum der Drehung im Schultergelenk schon sehr nahe gekommen ist.

Das entsprechende Resultat ergab sich für die Streckbewegung. Belastete man die Hand, so wurde sofort die Vorwärtsdrehung des Oberarms im Schultergelenk grösser, wie dies Figur 4 und 5 auf Tafel V deutlich zeigen. Figur 4 gehört zu einem Versuch, bei welchem die Hand am Apparat mit 520 g belastet war und Muskel *H* als Streckmuskel wirkte. Ursprung und Ansatz des Muskels besassen bezüglich die Entfernungen 14 cm und 10 cm von der Ellbogenaxe. Figur 5 entspricht einem Versuch mit 2200 g Handbelastung. Die Insertions-

stellen des Muskels *H*, welcher wieder als Streckmuskel thätig war, besassen die Entfernungen 16 cm und 10 cm von der Axe des Ellbogengelenks.

Die Winkelmessung an Figur 4 ergab 143° Streckung im Ellbogengelenk und 48° Vorwärtsdrehung oder Beugung im Schultergelenk, die Messung an Figur 5 dagegen 136° Streckung des Ellbogengelenks und 57° Beugung des Schultergelenks. Es zeigte sich also in beiden Fällen eine Vermehrung der Schultergelenkdrehung gegenüber dem Fall der Streckbewegung des unbelasteten Arms.

Aus diesen Versuchen ergiebt sich daher das Resultat:

Das Verhältniss zwischen den Gesammtdrehungen im Schultergelenk und im Ellbogengelenk, welche in Folge der Contraction eines eingelenkigen Beugers oder Streckers des Ellbogengelenks stattfinden, wird geändert, wenn man die Masse eines der beiden Armabschnitte vergrössert. Belastet man insbesondere die Hand, so wird die Gelenkbewegung im Schultergelenk verhältnissmässig vergrössert und zwar um so mehr, je grösser die zugefügte Masse ist.

Bisher war bei den Versuchen nur auf die Gesammtbewegungen in den beiden Gelenken Rücksicht genommen worden. Der numerische Werth des Verhältnisses der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk beträgt für das untersuchte Gliedersystem, wenn man die wirklichen Massen in Betracht zieht:

bei unbelasteter Hand abgerundet . . . . . . $\frac{43^\circ}{145^\circ} = 0{,}30$

bei Belastung der Hand mit ca. 800 g abgerundet $\frac{57^\circ}{148^\circ} = 0{,}39$

bei Belastung der Hand mit ca. 3500 g abgerundet $\frac{74^\circ}{148^\circ} = 0{,}50.$

Diese Werthe haben sich bei der Beugebewegung des Arms ergeben; sie gelten aber auch für die Streckbewegung, trotzdem die Versuche etwas kleinere Verhältnisswerthe zu Tage gefördert hatten.

6. Das Verhältniss der Gesammtbewegungen in den beiden Gelenken kann so zu Stande gekommen sein, dass für den ganzen Verlauf der Gliederbewegung bei unbelasteter Hand die Drehung im

Schultergelenk zu der Drehung im Ellbogengelenk im Verhältniss 0,30 gestanden hat. Es wäre aber auch denkbar, dass von der Streckstellung aus die Schultergelenkbewegung verhältnissmässig grösser oder kleiner gewesen wäre, und dass sie dann im Verlaufe der Bewegung allmählich ab- oder zugenommen hätte, so dass sich schliesslich der Werth 0,30 für das Verhältniss der Gesammtdrehungen im Durchschnitt ergeben hätte. Es wäre dies gleichbedeutend damit, dass ein eingelenkiger Beuger oder Strecker des Ellbogengelenks nicht von jeder Gliederstellung aus in gleicher Weise drehend auf das Schultergelenk einwirkt.

Um diese Frage zu entscheiden, wurde an dem Apparat die Gliederbewegung unter Einwirkung eines eingelenkigen Muskels von verschiedenen Beugestellungen im Ellbogengelenk aus eingeleitet und nach einer Beugung oder Streckung des Ellbogengelenks von ungefähr 30° wieder aufgehalten. Die Arretirung der Bewegung konnte dabei nicht durch die Thonpfanne bewirkt werden, weil man dieselbe und den zugehörigen Stempel nicht verschieben durfte, um die Massenvertheilung der beiden Gliederabschnitte nicht zu verändern. Es wurde daher für die Beugebewegung ein auf der Streckseite des Ellbogengelenks ausgespannter und für die Streckbewegung ein auf der Beugeseite ausgespannter starker Strick verwendet. Um die störende elastische Rückwirkung des Stricks, welche beim Thon ganz ausgeschlossen war, möglichst zu vermindern, wurde in denselben ein Knoten lose geschlungen. Wenn nun die Gliederbewegung bis zu der Stelle vorgeschritten war, wo der Strick straff gespannt wurde, so musste zuerst der Knoten durch die lebendige Kraft der Bewegung zusammengezogen werden. Immerhin liess sich eine kleine elastische Rückwirkung nicht ganz vermeiden. Es können daher die Resultate dieser Versuche nicht bis auf Bruchtheile von Winkelgraden sicher sein.

Es wurden zunächst Versuche über die Beugebewegung gemacht, welche der Muskel *A* bei verschiedener Lage seiner Insertionspunkte von der äussersten Streckstellung des Armes aus hervorruft. Die Resultate derselben finden sich in folgender Tabelle niedergelegt. Dabei sind der Einfachheit halber die beiden Verbindungsstrecken des am Oberarm befindlichen Muskelursprungs und des am Unterarm liegenden Muskelansatzes vom Mittelpunkt des Ellbogengelenks mit Ursprungsstrecke und Ansatzstrecke bezeichnet worden.

Länge der		Beugung im Ellbogengelenk	Rückwärtsdrehung oder Streckung im Schultergelenk	Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk
Ursprungsstrecke	Ansatzstrecke			
23 cm	7 cm	32°	11°	0,34
23	8	32	11	0,34
20	10	32	11	0,34
18	13	34	$11\frac{1}{2}$	0,34
16	16	34	$11\frac{1}{2}$	0,34
13	18	34	$11\frac{1}{2}$	0,34
10	20	34	$11\frac{1}{2}$	0,34
8	23	33	11	0,33
7	23	$32\frac{1}{2}$	11	0,34

Man erkennt aus dieser Tabelle zunächst wieder, dass auch das Verhältniss der Gelenkbewegungen zu Anfang der Beugung von der äussersten Streckstellung aus ganz unabhängig von der Ansatzweise des Muskels ist. Andererseits entnimmt man der Tabelle, dass dieses Verhältniss grösser ist als das Verhältniss der Gesammtdrehungen in den beiden Gelenken von der extremen Streckstellung bis zu der extremen Beugestellung des Ellbogengelenks; denn das letztere hatte nur den Werth 0,30.

Ein entsprechender Versuch mit dem Muskel *B* bei 23 cm bezüglich 8 cm Länge der Ursprungs- bezüglich Ansatzstrecke ergab 38° Beugung im Ellbogengelenk und $12\frac{1}{2}$° Streckung im Schultergelenk, so dass das Drehungsverhältniss den Werth 0,33 besass.

Ersetzte man den Muskel *B* durch den Muskel *C* unter Beibehaltung der Insertionsstellen, so kamen auf 32° Beugung im Ellbogengelenk $10\frac{1}{2}$° Streckung im Schultergelenk; es ergab sich also als Werth des Drehungsverhältnisses wieder 0,33.

Damit ist nachgewiesen, dass auch die Grösse der Muskelspannung keinen Einfluss auf den Anfang der Beugebewegung aus der Streckstellung ausübt.

Nachdem man sich überzeugt hatte, dass auch das Verhältniss der anfänglichen Drehungen von irgend welcher anderen Haltung des Armes aus weder durch Aenderung der Insertionsstellen noch durch Vergrösserung oder Verkleinerung der Muskelspannung geändert werden kann, wurde dieses Drehungsverhältniss für verschiedene um je 15° von einander abliegende Beugestellungen des Ellbogengelenks bestimmt. Die Bewegung wurde durch den Muskel *C* hervorgebracht, dessen Ursprung und Ansatz mit Ausnahme des letzten

Versuchs die Entfernungen 20 cm und 8 cm von der Ellbogenaxe besass. Bei der zuletzt ausgeführten Bewegung von 120° Beugungswinkel im Ellbogengelenk aus mussten die Insertionspunkte verlegt werden, weil sonst der Muskel nicht mehr die genügende Spannung zur Hervorbringung der Bewegung besass. Der Ursprung wurde in eine Entfernung von 23 cm, der Ansatz dagegen nur in eine Entfernung von 7 cm von der Ellbogenaxe gelegt. Die Resultate dieser Versuche finden sich in der folgenden Tabelle niedergelegt. Zum Verständniss derselben soll noch einmal ausdrücklich erwähnt werden, dass als Beugungswinkel des Ellbogengelenks derjenige Winkel aufgefasst worden ist, welchen die Längsaxe des Unterarms mit der Verlängerung der Längsaxe des Oberarms bildet, so dass also z. B. die äusserste Streckstellung im Ellbogengelenk durch den Beugungswinkel von 0° gekennzeichnet ist.

Beugungswinkel im Ellbogengelenk für die Ausgangsstellung	Beugung im Ellbogengelenk	Rückwärtsdrehung oder Streckung im Schultergelenk	Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk
0°	32°	11°	0,34
15	29	10	0,34
30	30	10	0,33
45	30	10	0,33
60	28½	8½	0,30
75	23½	6	0,26
90	25	5	0,20
105	23½	3½	0,15
120	23½	1½	0,06
135	14	½	0,04

Daraus geht hervor, dass das Verhältniss der beiden Gelenkbewegungen erst langsam, dann schneller abnimmt, wenn man die Beugebewegung von immer grösserer Beugestellung im Ellbogengelenk aus vor sich gehen lässt. Bei einer Anfangsstellung, welche der extremen Beugestellung sehr nahe kommt, tritt unter alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Beugemuskels fast ausschliesslich Beugung im Ellbogengelenk, aber so gut wie keine Bewegung im Schultergelenk ein. Die obere Figurenreihe auf der linken Seite von Tafel VI erläutert diese Thatsache. Dabei ist die Ausgangsstellung immer durch dunklere Schattirung hervorgehoben und angenommen worden, dass die Beugebewegung im Ellbogengelenk 30° beträgt. Da von

135° Beugung aus die Bewegung im Ellbogengelenk höchstens nur noch um 15° im Sinne weiterer Beugung fortgesetzt werden kann, so ist diesem Umstande in der Figur Rechnung getragen worden. Um aber einen Vergleich mit den übrigen Figuren zu ermöglichen, findet man die Endstellung, welche das Gliedersystem annehmen würde, wenn die Beugung thatsächlich um 30° fortgesetzt werden könnte, durch punktirte Conturen der beiden Knochen angedeutet.

Die obere Figurenreihe auf der rechten Seite von Tafel VI zeigt, wie sich infolge der allmählichen relativen Verminderung der Drehung im Schultergelenk die Beugebewegung zwischen den beiden extremen Gliederstellungen gestalten muss, wenn sie fortlaufend ruckweise um je 30° Beugung vor sich geht. Zunächst sind die einzelnen Bewegungsphasen gesondert nebeneinander und dann in der Figur am weitesten rechts in richtiger Lage zu einander gezeichnet worden. Jede spätere Stellung ist durch schwächere Schattirung kenntlich gemacht.

In gleicher Weise wie für die Beugebewegung sind auch Versuche über das Verhältniss der Drehungen in beiden Gelenken für die Streckbewegung bei verschiedenen Ausgangsstellungen gemacht worden. Dazu wurde der Muskel *A* verwendet mit 23 cm und 8 cm Länge von Ursprungs- und Ansatzstrecke. Die folgende Tabelle giebt die Resultate dieser Versuche.

Beugungswinkel im Ellbogengelenk für die Ausgangsstellung	Streckung im Ellbogengelenk	Vorwärtsdrehung oder Beugung im Schultergelenk	Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk
150°	28°	0°	0
135	30	1	0,03
120	30	3	0,10
105	27½	4½	0,16
90	27	5½	0,20
75	31	9	0,29
60	32	10½	0,33
45	31	11	0,35
30	27	10	0,37
15	14	5	0,36

Beachtet man, dass die Winkelbestimmung bei diesen Versuchen infolge der immerhin noch mangelhaften Arretirung der Bewegung auf allzu grosse Genauigkeit keinen Anspruch machen darf, so ergiebt diese Tabelle das gleiche Resultat wie die ent-

sprechende Tabelle auf Seite 97. Von einer stark gebeugten Stellung des Ellbogengelenks aus ist die Beugung im Schultergelenk sehr gering. Die letztere wird um so grösser, je mehr sich die Anfangsstellung der Streckstellung des Ellbogengelenks nähert. Die Streckbewegung zwischen den beiden extremen Stellungen des Ellbogengelenks wird daher in umgekehrter Weise vor sich gehen wie die Beugebewegung. Die unteren Figurenreihen auf Tafel VI, welche genau so für die Streckbewegung aufzufassen sind, wie die darüberstehenden Figurenreihen für die Beugebewegung, erläutern dieses Verhalten.

Ganz entsprechende Versuche wurden für beide Bewegungsarten im Falle der Belastung der Hand am Apparat durch ein Gewicht von 2200 g, d. h. also bei Belastung der menschlichen Hand mit 3500 g, angestellt. Die folgenden beiden Tabellen geben die Resultate derselben wieder.

Beugebewegung bei 3500 g Handbelastung.

Beugungswinkel im Ellbogengelenk für die Ausgangsstellung	Beugung im Ellbogengelenk	Rückwärtsdrehung oder Streckung im Schultergelenk	Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk
0°	30°	15°	0,50
15	35½	18	0,51
30	30½	15	0,49
45	34	17	0,50
60	29½	15	0,51
75	31½	15½	0,49
90	33	15	0,46
105	25	9	0,36
120	25	3	0,12

Streckbewegung bei 3500 g Handbelastung.

Beugungswinkel im Ellbogengelenk für die Ausgangsstellung	Streckung im Ellbogengelenk	Vorwärtsdrehung oder Beugung im Schultergelenk	Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk
150°	23°	7°	0,30
135	37	13	0,33
120	30	12	0,40
105	32	13	0,41
90	28	11½	0,41
75	26	12	0,46
60	26	12½	0,48
45	23	11	0,48
30	24	12	0,50
15	14	7	0,50

Aus beiden Versuchsreihen ergiebt sich, dass das Drehungsverhältniss durch die Handbelastung viel constanter für die verschiedenen Ausgangsstellungen geworden ist. Es nimmt erst von der rechtwinkligen Beugestellung aus merklich ab. Im theoretischen Theile dieser Arbeit wird gezeigt, dass es für eine noch grössere Belastung der Hand, nämlich von 4400 g, überhaupt constant den Werth 0,5 beibehält, und dass es für Belastungen über 4400 g sogar mit vorgeschrittener Beugestellung etwas zunimmt. Diese Thatsache liess sich durch den Versuch am Apparat nicht mit Sicherheit constatiren, da bei so grossen Belastungen infolge des vermehrten Druckes auf die Glasplatte die Bewegung beeinflusst wird.

Die Figurenreihen auf Tafel VII veranschaulichen die Gliederbewegungen, wie sie bei 4400 g und bei 15000 g Handbelastung vor sich gehen müssen. Die exacte Ableitung dieser Bewegungen wird im zweiten Theile der Arbeit folgen. Man erkennt aus denselben, dass die Bahn, welche der Mittelpunkt (Schwerpunkt) der in der Hand gehaltenen Masse beschreibt, mit wachsendem Gewicht dieser Masse sich immer mehr einer geraden Linie nähert. Die Theorie sagt, dass in dem nicht realisirbaren Falle, wo das Gewicht der gehaltenen Masse unendlich gross gegenüber dem Gewichte des ganzes Arms ist, der Schwerpunkt der in der Hand gehaltenen Masse bei der Beugebewegung in genau geradliniger Bahn direct auf den Schultergelenkmittelpunkt zu steuern, und umgekehrt bei der Streckbewegung sich in genau geradliniger Bahn von dem Schultergelenkmittelpunkte entfernen würde.

7. Die bisherigen Versuche bezogen sich ausschliesslich auf den Fall, dass die Gliederbewegung von irgend einer ruhenden Anfangsstellung aus eingeleitet wird. Wenn nun aber ein eingelenkiger Beuge- oder Streckmuskel des Ellbogengelenks durch seine Contraction eine stetige Bewegung zwischen den beiden extremen Haltungen des Armes hervorruft, so findet er im Verlaufe seiner Thätigkeit, mit Ausnahme des Anfanges der Bewegung, die einzelnen Armabschnitte fortwährend schon mit Geschwindigkeiten begabt vor. Seine Spannung wirkt also dann auf ein Gliedersystem, welches schon in Bewegung ist, bei welchem auch, wenn die Contraction des Muskels plötzlich unterbrochen und das System sich selbst überlassen würde, noch

weitere Drehungen im Ellbogengelenk und im Schultergelenk stattfinden würden. Es entsteht daher die Frage, ob der Muskel auf das bewegte System bei jeder beliebigen Beugestellung des Ellbogengelenks genau so wirkt, wie auf das ruhende, und ob die durch die bisherige Contraction hervorgebrachten Geschwindigkeiten eine Aenderung in dem Verhältniss der Drehungen in den beiden Gelenken bei weiterer Contraction verursachen. Wenn dies der Fall wäre, so würde daraus zu folgern sein, dass die Lage der Insertionspunkte und der Spannungszustand des Muskels, welche ja auf das Verhältniss der Gesammtdrehungen keinen Einfluss ausübten, doch für den Ablauf der ganzen Bewegung bestimmend sein können. Mit der Aenderung der Insertionsstellen und der Spannung ändern sich ja auch die Drehungsmomente, welche der Muskel auf die beiden Abschnitte des Armes ausübt, und diese sind wiederum massgebend für die Geschwindigkeiten, welche die beiden Theile sowohl in ihrer absoluten Bewegung als in ihrer zu einander relativen Bewegung erlangen.

Diese Frage kann nur dadurch entschieden werden, dass man sich eine eingehende Kenntniss von dem ganzen Ablaufe der Bewegung verschafft. Diese Kenntniss wird aber vermittelt durch die auf den Tafeln III, IV und V niedergelegten photographischen Aufnahmen des ganzen Bewegungsvorganges. Hier hat man durch die Anwendung der Geissler'schen Röhren eine genügende Anzahl successiver Stellungen des Gliedersystems sowohl für die Beuge- als für die Streckbewegung registrirt. Da zwischen je zwei aufeinander folgenden Bewegungsphasen immer genau derselbe Zeitraum, nämlich die Dauer einer Schwingung der Unterbrechungsstimmgabel, liegt, so geben die Figuren nicht nur Aufschluss über die einzelnen Stellungen, welche während der Bewegung von dem Gliedersystem nach und nach eingenommen werden, sondern sie lassen auch die Geschwindigkeiten erkennen, mit denen das System durch diese Stellungen hindurchgegangen ist. Man sieht z. B. auf den ersten Blick, dass die durch Figur 1 auf Tafel IV dargestellte Gliederbewegung viel schneller vor sich gegangen ist als die zu Figur 2 auf Tafel III gehörende: denn die einzelnen Stellungen liegen bei ersterer räumlich viel weiter auseinander als bei letzterer, obgleich der zeitliche Abstand bei beiden derselbe gewesen ist.

Man kann nun auf zwei Arten verfahren, um die successiven Bewegungsphasen zu bestimmen. Entweder man misst mit Hülfe eines genügend präcis arbeitenden Winkelmessinstrumentes direct die Winkel, welche die Längsaxe des Oberarms mit einer in der Bewegungsebene gelegenen festen Geraden einerseits und die Längsaxe des Unterarms mit der Verlängerung der Längsaxe des Oberarms andererseits bildet, — oder man bezieht die Bewegung auf ein in derselben Ebene gelegenes festes Coordinatensystem und misst mit Hülfe eines besonderen Instruments die Länge der Coordinaten für die einzelnen Stellungen der Mittelpunkte von Schultergelenk, Ellbogengelenk und Handgelenk, und leitet dann aus diesen Coordinaten die Winkel ab. Da mir kein genügend genauer Winkelmesser, wohl aber der in der Arbeit über den Gang des Menschen ausführlich beschriebene Coordinatenmesser zur Verfügung stand, so habe ich den letzteren Weg beschritten.

Das Coordinatensystem wurde so gelegt, dass der Anfangspunkt desselben mit dem bei der Bewegung fest bleibenden Schultergelenkmittelpunkt und die eine Axe (Y-Axe) mit der Richtung der beiden Längsaxen in der äussersten Streckstellung zusammenfiel. Die andere Axe (X-Axe) stand dazu senkrecht und wurde in der Richtung nach vorn positiv gerechnet. Hat man die Coordinaten der Mittelpunkte von Ellbogengelenk und Handgelenk gemessen, so lassen sich durch eine sehr einfache trigonometrische Rechnung die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmen, welche die Längsaxen des Ober- und Unterarms mit der Richtung der Y-Axe bilden. Der Winkel φ_1 giebt dann direct an, um wieviel der Oberarm aus der Streckstellung des ganzen Arms im Schultergelenk nach vor- oder rückwärts gedreht ist, wenn man beide Drehungsarten durch das Vorzeichen ($+$ für Vorwärtsdrehung und $-$ für Rückwärtsdrehung) von einander unterscheidet. Der Winkel φ_2 giebt dagegen zunächst nur an, um welchen Winkel sich die Richtung der Unterarmlängsaxe gegenüber der Streckstellung geändert hat. Will man aus der Grösse von φ_2 den Drehungswinkel ψ im Ellbogengelenk ableiten, so braucht man nur, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von φ_1, den Winkel φ_1 von φ_2 abzuziehen. Da man diese Winkelbestimmung an den Figuren oder, was für die Erzielung grosser Genauigkeit besser ist, auf den photographischen Platten auch mit Hülfe eines feineren Transporteurs controliren kann, so sollen die

Resultate der Coordinatenmessung nicht ausführlich angegeben, sondern gleich die Grössen der aus ihnen abgeleiteten Winkel φ_1, φ_2 und ψ mitgetheilt werden.

Es sind nun nur Messungen an den auf die Beugebewegung des Ellbogengelenks ohne Armbelastung bezüglichen Figuren (Figur 2, 3, 4 und 5 auf Tafel III und Figur 1 auf Tafel IV) gemacht worden. Die Streckbewegung wurde deshalb nicht einer genaueren Messung unterworfen, weil, wie schon oben angeführt worden ist, die hierauf bezüglichen Versuche mit zu grossen Fehlerquellen belastet sind, als dass sie eine genaue Messung zulassen könnten. Die Resultate der Winkelbestimmung für die Beugebewegung sind in den umstehenden Tabellen (Seite 104 und 105) niedergelegt worden. Dabei soll noch einmal hervorgehoben werden, dass die drei ersten Versuche (Tafel III, Figur 2, 3 und 4) sich nur durch verschiedene Lage der Muskelinsertionen, die beiden letzten (Tafel III, Figur 5 und Tafel IV, Figur 1) dagegen sich von den anderen und von einander durch die Anwendung verschiedener Muskeln unterscheiden.

Schon ein Vergleich der fünf Tabellen zeigt, dass dieselben insofern nahezu vollständig übereinstimmen, als überall, wo derselbe, oder annähernd derselbe, Beugungswinkel des Ellbogengelenks (ψ) in verschiedenen Tabellen auftritt, auch innerhalb der durch die unvermeidlichen Fehlerquellen gesetzten Genauigkeitsgrenzen, der gleiche Drehungswinkel im Schultergelenk (φ_1) sich einstellt. Es stimmen daher die fünf unter den verschiedensten Bedingungen angestellten Versuche in der Weise überein, dass bei allen das Gliedersystem dieselben successiven Stellungen durchwandert. Sie unterscheiden sich nur dadurch, dass bei dem einen (z. B. Tafel IV, Figur 1) diese Stellungen schneller, bei dem anderen (z. B. Tafel III, Figur 2) dieselben langsamer durchlaufen werden. Die Lage der Insertionsstellen und die Spannungsgrössen des Muskels haben daher wohl einen Einfluss auf die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung zwischen den beiden extremen Stellungen des Armes vor sich geht, nicht aber auf die Art, in welcher die Gliederbewegung stattfindet. Die Gliederbewegung des Armes ist daher bei alleiniger Contraction eines eingelenkigen Beugemuskels eine *Zwangsbewegung*; sie findet immer in genau derselben Weise statt, man könnte sie nicht willkürlich abändern, wenn man nur eingelenkige Muskeln zur Verfügung hätte.

Tafel III, Fig. 2			Tafel III, Fig. 3			Tafel III, Fig. 4			Tafel III, Fig. 5			Tafel IV, Fig. 1		
φ_1	φ_2	ψ[1]	φ_1	φ_2	ψ	φ_1	φ_2	ψ	φ_1	φ_2	ψ	φ_1	φ_2	ψ
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
									— 0°56′	1°32′	2°28′	— 0°58′	1°41′	2°39′
						— 1°22′	2°17′	3°39′	— 1 12	1 59	3 11	— 1 23	2 25	3 48
— 1°48′	2°44′	4°32′	— 1°45′	2°40′	4°25′	— 1 38	2 45	4 23	— 1 30	2 29	3 59	— 1 52	3 16	5 8
— 2 5	3 8	5 13	— 2 3	3 5	5 8	— 1 47	3 17	5 4	— 1 52	3 6	4 58	— 2 30	4 20	6 50
— 2 25	3 39	6 4	— 2 23	3 38	6 1	— 2 18	3 53	6 11	— 2 20	3 51	6 11	— 3 15	5 37	8 52
— 2 47	4 13	7 0	— 2 45	4 12	6 57	— 2 44	4 35	7 19	— 2 52	4 43	7 35	— 4 9	7 12	11 21
— 3 11	4 48	7 59	— 3 10	4 50	8 0	— 3 11	5 21	8 32	— 3 32	5 45	9 17	— 5 13	8 59	14 12
— 3 38	5 30	9 8	— 3 40	5 36	9 16	— 3 43	6 13	9 56	— 4 16	6 53	11 9	— 6 24	11 3	17 27
— 4 10	6 16	10 26	— 4 12	6 26	10 38	— 4 22	7 14	11 36	— 5 18	8 17	13 35	— 7 50	13 29	21 19
— 4 45	7 9	11 54	— 4 50	7 22	12 12	— 5 6	8 22	13 28	— 6 10	9 46	15 56	— 9 19	16 1	25 20
— 5 28	8 14	13 42	— 5 32	8 25	13 57	— 5 56	9 41	15 37	— 7 15	11 28	18 43	—10 55	18 48	29 43
— 6 12	9 17	15 29	— 6 18	9 34	15 52	— 6 52	11 10	18 2	— 8 32	13 25	21 57	—12 54	22 12	35 6
— 7 2	10 32	17 34	— 7 9	10 52	18 1	— 7 55	12 47	20 42	— 9 51	15 30	25 21	—14 33	25 10	39 43
— 7 57	11 55	19 52	— 8 9	12 20	20 29	— 9 6	14 38	23 44	—11 19	17 50	29 9	—16 32	28 41	45 13
— 8 55	13 21	22 16	— 9 8	13 50	22 58	—10 21	16 38	26 59	—12 51	20 20	33 11	—18 21	32 2	50 23
— 9 58	14 57	24 55	—10 19	15 37	25 56	—11 44	18 49	30 33	—14 29	23 3	37 32	—20 43	36 12	56 55
—11 5	16 41	27 46	—11 27	17 21	28 48	—13 9	21 3	34 12	—16 4	25 43	41 47	—22 38	39 34	62 12
—12 16	18 32	30 48	—12 40	19 14	31 54	—14 43	23 38	38 21	—17 44	28 35	46 19	—24 37	43 35	68 12
—13 36	20 33	34 9	—13 59	21 18	35 17	—16 16	26 11	42 27	—19 30	31 40	51 10	—26 42	47 45	74 27
—14 53	22 35	37 28	—15 16	23 21	38 37	—17 51	28 52	46 43	—21 18	34 53	56 11	—28 29	51 47	80 16
—16 17	24 48	41 5	—16 40	25 34	42 14	—19 41	31 55	51 36	—22 57	37 56	60 53	—30 12	55 47	85 59
—17 35	26 54	44 29	—18 5	27 52	45 57	—21 20	34 48	56 8	—24 43	41 13	65 56	—31 57	60 1	91 58
—19 3	29 18	48 21	—19 27	30 9	49 36	—22 57	37 42	60 39	—26 25	44 34	70 59	—33 36	64 19	97 55
—20 30	31 43	52 13	—20 57	32 38	53 35	—24 38	41 5	65 43				—35 13	68 47	104 0
—21 58	34 12	56 10	—22 15	34 53	57 8	—26 18	43 59	70 17	—29 43	51 26	81 9	—36 34	73 19	109 53
—23 20	36 33	59 53	—23 51	37 37	61 28	—27 57	47 2	74 59	—31 18	54 51	86 9	—37 49	77 56	115 45

—24 47	39 10	63 57	—25 20	40 5	65 25	—29 32	50 19	79 51	—32 45	58 20	91 5	—38 54	82 41	121 35
—26 19	41 43	68 2	—26 39	42 49	69 28	—30 59	53 39	84 38	—34 14	62 3	96 17	—39 41	87 29	127 10
—27 48	44 36	72 24	—27 57	45 22	73 19	—32 26	56 57	89 23	—35 37	65 39	101 16	—40 23	92 36	132 59
—28 58	46 58	75 56	—29 24	47 52	77 16	—33 39	60 13	93 52				—40 52	97 46	138 38
—30 18	49 50	80 8	—30 41	50 45	81 26	—35 3	63 36	98 39	—38 47	73 0	111 47	—41 7	103 52	144 59
—31 42	52 27	84 9	—31 59	53 25	85 24				—39 53	76 56	116 49	—41 7	108 24	149 31
—33 1	54 53	87 54	—33 15	56 3	89 18				—40 44	80 52	121 36			
—34 13	57 44	91 57	—34 26	58 37	93 3	—38 57	72 41	111 38	—41 40	84 49	126 29			
—35 28	60 26	95 54	—35 32	61 21	96 53	—39 47	75 48	115 35	—42 28	88 58	131 26			
—36 35	63 14	99 49	—36 38	64 7	100 45	—40 26	79 0	119 26	—43 7	93 6	136 13			
—37 40	66 12	103 52	—37 41	66 51	104 32	—41 9	82 5	123 14	—43 21	97 19	140 40			
—38 39	68 49	107 28	—38 40	69 34	108 14	—41 43	85 12	126 55	—43 21	101 34	144 55			
—39 32	71 31	111 3	—39 28	72 24	111 52	—42 12	88 21	130 33						
—40 25	74 22	114 47			[2]	—42 34	91 23	133 57						
—41 17	77 10	118 27	—40 52	77 55	118 47	—42 34	94 48	137 22						
—41 56	80 1	121 57	—41 28	80 43	122 11	—42 34	98 17	140 51						
—42 34	82 52	125 26	—42 3	83 31	125 34	—42 34	101 21	143 55						
—43 9	85 46	128 55	—42 38	86 11	128 49									
—43 36	88 40	132 16												
—43 50	91 35	135 25	—43 23	92 2	135 25									
—43 50	94 47	138 37	—43 23	95 9	138 32									
—43 50	97 59	141 49	—43 23	98 15	141 38									
—43 50	100 34	144 24	—43 23	100 48	144 11									

1) φ_1 giebt den Drehungswinkel im Schultergelenk an; derselbe ist mit positivem Vorzeichen bei Vorwärtsdrehung, mit negativem Vorzeichen bei Rückwärtsdrehung versehen. Da in allen Tabellen φ_1 nur negative Werthe besitzt, so handelt es sich bei der Beugebewegung des Armes nur um Rückwärtsdrehung oder Streckung im Schultergelenk. φ_2 ist der Winkel, um welchen sich die Richtung der Längsaxe des Unterarms von der Streckstellung aus geändert hat. ψ endlich giebt den Beugungswinkel des Ellbogengelenks an. ψ steht mit den beiden anderen Winkeln in der Beziehung: $\psi = \varphi_2 \dotplus \varphi_1$.

2) Die an diese und die anderen frei gelassenen Stellen gehörenden Winkelgrössen konnten nicht genau bestimmt werden.

welche über das Ellbogengelenk hinwegziehen, und wenn die Schwere nicht modificirend auf dieselbe einwirkte. Dem Arm ist dabei eine ganz bestimmte Folge von Gliederstellungen vorgeschrieben. Das Einzige, was man willkürlich abändern könnte, wäre die Geschwindigkeit der Zwangsbewegung, je nachdem man die eingelenkigen Muskeln stark oder schwach innervirte.

Noch deutlicher als durch die Betrachtung der Tabellen kann man diese Thatsachen erkennen, wenn man die Werthe der Winkel ψ und φ_1 als Abscissen und Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems verwendet und die Curve aufzeichnet, welche der in den Tabellen ausgedrückten Abhängigkeit der beiden Winkel entspricht. Dies ist auf Tafel VIII für die fünf Versuche gethan worden. Wollte man alle fünf Curven in ein und dasselbe Coordinatensystem einzeichnen, so würden sich dieselben nahezu überdecken, so dass man sie nicht auseinander zu halten im Stande wäre. Daher ist für jede folgende der fünf Curven das Coordinatensystem nach unten um je einen Centimeter verschoben worden. Man glaubt nun ein System von fünf Parallelcurven vor sich zu haben. Die verschiedene Geschwindigkeit, mit welcher die Beugebewegung in einigen Fällen vor sich gegangen ist, erkennt man aus den verschiedenen Abständen der durch die Messung gefundenen Punkte dieser Curven.

Was endlich die Beugebewegung des Gliedersystems bei Belastung der Hand anlangt, so war in dem Falle der grössten angewandten Belastung (2200 g am künstlichen System = 3500 g am wirklichen Arm) eine Messung der Winkelgrössen gar nicht nöthig. Man bestätigt nämlich aus Figur 3 auf Tafel IV, dass in diesem Falle ein Punkt der Unterarmlängsaxe, welcher dieselbe Entfernung vom Mittelpunkt des Ellbogengelenks besitzt als letzterer vom Mittelpunkt des Schultergelenks, sich fast genau auf der durch die beiden Längsaxen in der Streckstellung markirten geraden Linie bewegt. Demnach bilden in diesem Falle bei allen Gliederstellungen die Längsaxen von Oberarm und Unterarm mit der die Streckstellung bezeichnenden geraden Linie ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Spitze der Mittelpunkt des Ellbogengelenks ist. Daraus geht hervor, dass die beiden Winkel φ_1 und φ_2, welche die Längsaxen von Ober- und Unterarm mit ihrer Ausgangslage (Y-Axe) bilden, numerisch gleich sind; dieselben unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen, indem

φ_2 immer positive, φ_1 dagegen nur negative Werthe besitzt. Daraus geht aber wiederum hervor, dass der Beugungswinkel ψ des Ellbogengelenks, welcher gleich der Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ war, unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens von φ_1 numerisch immer doppelt so gross ausfällt als φ_1. Es ist also im ganzen Verlaufe der Beugebewegung die Rückwärtsdrehung im Schultergelenk halb so gross wie die Beugung im Ellbogengelenk. Genau genommen tritt dieser Fall erst bei 4400 g Belastung des wirklichen Armes ein; die Bewegung bei der geringeren Belastung von 3500 g weicht aber nicht so sehr von der bei der grösseren Belastung eintretenden ab, als dass sich die Unterschiede bei der mit der Messung zu erreichenden Genauigkeit nachweisen liessen. Zeichnet man auch für diesen Fall die Curve auf, welche die Abhängigkeit der beiden Winkel ψ und φ_1 veranschaulicht, so zeigt sich, dass sie eine gerade Linie ist. Dieselbe findet sich auch auf Tafel VIII eingetragen, um den grossen Unterschied deutlich zu machen, welchen die Bewegung mit Handbelastung gegenüber der Bewegung ohne Handbelastung aufweist.

Die entsprechenden Resultate gelten für die Streckbewegung. Da sie nicht auch auf empirischem Wege mit genügender Sicherheit abgeleitet werden konnten, so soll, was deren Beweis anlangt, auf den zweiten (theoretischen) Theil dieser Arbeit verwiesen werden.

Stellt man endlich an der Hand der Tabellen auf Seite 104 und 105 das Verhältniss zwischen den beiden Gelenkbewegungen für verschiedene Phasen der Bewegung fest, so erkennt man leicht, dass dasselbe innerhalb der Genauigkeitsgrenzen überall den gleichen Werth besitzt wie in dem Falle, wo die Contraction des Muskels bei den gleichen Ausgangsstellungen von der Ruhe aus geschieht. Daraus ergiebt sich aber, dass die Figurenreihen auf der rechten Seite der Tafel VI und auf Tafel VII nicht allein die Gliederbewegung darstellen, wenn sie ruckweise von einer Beugestellung nach der anderen geschieht, sondern dass dieselben den ganzen stetigen Verlauf der Beuge- oder Streckbewegung des Armes infolge alleiniger Wirkung eines e i n g e l e n k i g e n Beuge- oder Streckmuskels veranschaulichen. —

Es liegt nun die Frage nahe, ob und wie weit sich die bisherigen Befunde über die Wirkungsweise eingelenkiger Beuge- oder Streckmuskeln des Ellbogengelenks am Lebenden nachweisen lassen.

Um diese Frage zur Entscheidung zu bringen, hatte Herr Dr. W. His jun. die Güte, in meiner Gegenwart einige Muskeln auf elektrischem Wege zur Contraction zu bringen. Um die Wirkung der Schwere auf die Gliederbewegung möglichst auszuschliessen, wurde das Versuchsindividuum veranlasst, sich horizontal auf die Seite zu legen, so dass die Axe des Ellbogengelenks annähernd vertical stand und der in mittlerer Pronationsstellung befindliche Unterarm nur lose auf dem Körper auflag. Darauf wurden nach einander sowohl der M. brachialis als auch der M. brachioradialis von verschiedenen Stellungen des Ellbogengelenks aus zur Contraction gebracht. Ging man von der äussersten Streckstellung aus, so zeigte sich während der Beugung des Unterarms im Ellbogengelenk thatsächlich eine geringe Rückwärtsdrehung (Streckung) des Oberarms im Schultergelenk. Beide Gelenkbewegungen waren zwar nicht sehr ausgiebig, man konnte sie aber doch deutlich constatiren. Liess man einen der beiden Muskeln sich contrahiren, nachdem vorher der Unterarm bis über die rechtwinklige Beugestellung im Ellbogengelenk hinausgeführt worden war, so blieb der Oberarm bei der Contraction in seiner Lage, und es zeigte sich nur noch Beugung im Ellbogengelenk. Dies entspricht also genau den Versuchen am künstlichen Modell des Armes.

Andererseits liess sich auch nachweisen, dass die beiden eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii bei ihrer Contraction nicht nur den Unterarm gegen den Oberarm strecken, sondern auch den Oberarm im Schultergelenk nach vorwärts drehen (beugen).

Diese Erfolge ermuthigten uns, für die Zukunft den Plan ins Auge zu fassen, eingehendere Untersuchungen am Lebenden über die Wirkungsweise der Muskeln anzustellen und wo möglich zu versuchen, die eintretenden Gelenkbewegungen auf photographischem Wege zu registriren und zu messen.

Jedenfalls hat sich aus den wenigen Vorversuchen aber schon die Thatsache auch am Lebenden erwiesen, dass die Muskeln gewöhnlich mit auf Gelenke wirken, über welche sie gar nicht hinwegziehen.

II. Theil.

Theoretische Ableitung der Versuchsergebnisse.

In nebenstehender Figur 6 seien $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Mittelpunkte vom Schulter-, Ellbogen- und Handgelenk. Der Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ des Schultergelenks soll im Raume fest liegen. Da nur eingelenkige Muskeln des Ellbogengelenks, nicht aber solche, welche über das Schultergelenk hinweggehen, in Rücksicht gezogen werden sollen, so ist es für die folgenden Betrachtungen ganz gleichgültig, ob man den Rumpf mit dem Schultergürtel durch besondere Kräfte im Raume festgestellt annimmt, oder ob man den Arm vom Rumpfe losgelöst denkt und als Körpersystem für sich betrachtet, welches um den im Raume festgestellten Schultergelenkmittelpunkt drehbar ist. Es soll daher der Einfachheit der Betrachtung halber die letztere Annahme gemacht werden. Ferner soll angenommen werden, dass eine feste Axe im Ellbogengelenk vorhanden sei, und dsss dieselbe senkrecht zu der Ebene $\mathfrak{S}\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ der drei Gelenkmittelpunkte stehe. Denkt man sich die Hand mit dem Unterarm starr verbunden, so wird die Haltung des ganzen Armes bekannt sein, wenn man die Lage der Ebene $\mathfrak{S}\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ im Raume kennt, und wenn man weiss, welche Winkel φ_1 und φ_2 die Längsaxen $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ von Ober- und

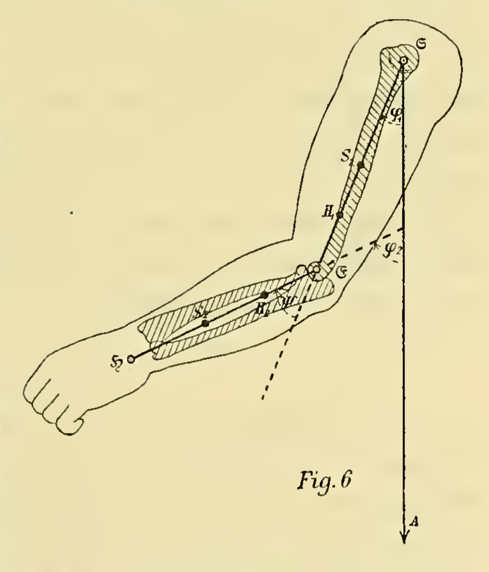


Fig. 6

Unterarm mit einer in der Ebene $\mathfrak{S}\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ gelegenen Geraden $\mathfrak{S}A$ bilden. Diese Gerade kann ganz beliebig gewählt werden. Damit man sich ihre Lage leicht vorstellen kann, wollen wir annehmen, dass sie die Schnittgerade der Ebene $\mathfrak{S}\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ mit der bei normaler Rumpfhaltung durch die Mittelpunkte der Schulter- und Hüftgelenke hindurchgehenden Ebene darstellt.

Die Winkel φ_1, φ_2 sollen in der Richtung nach vorn positiv gerechnet werden. Mit diesen beiden Winkeln steht in engstem Zusammenhange der Winkel ψ, welchen die Längsaxe $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ des Unterarms mit der Verlängerung der Längsaxe $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ des Oberarms bildet. Dieser Winkel ψ soll »Beugungswinkel des Ellbogengelenks« und der Winkel φ_1 »Drehungswinkel des Schultergelenks« genannt sein.

Betrachtet man $\mathfrak{S}A$ als Ausgangsstellung der Längsaxe des Oberarms, so entspricht einem positiven Werthe des Winkels φ_1 eine Drehung des Oberarms im Schultergelenk nach vorn, also eine Beugung des Oberarms; ein negativer Werth von φ_1 deutet dagegen auf eine Rückwärtsdrehung (Streckung) des Oberarms gegenüber der Stellung $\mathfrak{S}A$ hin. Der Winkel ψ kann sein Vorzeichen nicht wechseln, da die Längsaxe des Unterarms immer nur nach einer Richtung innerhalb der Ebene $\mathfrak{S}\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ von der Verlängerung der Oberarmlängsaxe abweichen kann. Derselbe kann aber den Werth Null annehmen, nämlich in der Streckstellung des Ellbogengelenks. Rechnet man ψ in der Richtung von der Verlängerung der Oberarmlängsaxe zur Unterarmlängsaxe hin positiv, so besteht zwischen den drei Winkeln φ_1, φ_2 und ψ die Relation $\varphi_1 + \psi = \varphi_2$. Es ist also

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1 .$$

Der Schwerpunkt S_1 des Oberarms liegt nach früheren Untersuchungen[1]) mit grosser Annäherung in der Verbindungslinie der Mittelpunkte von Schulter- und Ellbogengelenk; seine Entfernung vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ sei r_1. Der Schwerpunkt S_2 des als starr angenommenen Systems Unterarm plus Hand liegt in der Verbindungslinie von Ellbogen- und Handgelenkmittelpunkt; seine Entfernung von $\mathfrak{E}$ sei r_2. Die Masse des Oberarms sei m_1, die des

1) W. BRAUNE und O. FISCHER, Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers u. s. w. Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften Bd. XV, Nr. VII, 1889, pag. 595.

Systems Unterarm plus Hand m_2. Die Länge des Oberarms, d. h. die Länge $\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{E}}$ sei l_1.

Ausser den beiden Schwerpunkten S_1 und S_2 besitzen für die Gliederbewegungen des Arms noch zwei andere feste Punkte der beiden Glieder bemerkenswerthe Bedeutung.

Denkt man sich die Massen von Unterarm und Hand in dem Mittelpunkte $\mathfrak{E}$ des Ellbogengelenks concentrirt und der Masse des Oberarms hinzufügt, so entsteht ein System, dessen Masse gleich der Summe der Massen von Oberarm, Unterarm und Hand, d. h. also gleich der Masse des ganzen Armes ist. Bezeichnet man dieselbe mit m_0, so ist

$$m_0 = m_1 + m_2.$$

Der Schwerpunkt dieses Massensystems, welches reducirtes Oberarmsystem heissen möge, liegt auf der Verbindungsstrecke $\overline{S_1\mathfrak{E}}$ und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältniss der Massen vom Oberarm einerseits und vom System Unterarm plus Hand andererseits. Derselbe ist also ein fester Punkt im Oberarm. Entsprechend seiner Bedeutung für die Bewegungen des Gliedersystems unter dem Einfluss äusserer und innerer Kräfte soll dieser Punkt »Hauptpunkt des Oberarms« genannt sein. Derselbe ist in die Figur 6 und in die folgende Figur 7 eingetragen und mit H_1 bezeichnet worden. Seine Entfernungen von $\mathfrak{S}$, S_1 und $\mathfrak{E}$ seien bezüglich c_1, e_1 und d_1 (vgl. Figur 7). Die Verbindungsstrecken des Hauptpunktes H_1 mit den Mittelpunkten vom Schulter- und Ellbogengelenk, also die Strecken $\overline{\mathfrak{S}H_1}$ und $\overline{H_1\mathfrak{E}}$, sollen die Namen »Hauptstrecken des Oberarms« führen[1]).

Fig. 7

Denkt man sich ferner die Masse des Oberarms im Punkte $\mathfrak{E}$ concentrirt und der Masse des Systems Unterarm plus Hand hinzugefügt, so entsteht ein

1) Es ist wohl zu beachten, dass hier der Arm ganz isolirt von dem übrigen Körper ins Auge gefasst wird. Betrachtet man dagegen den Arm bei seinen Bewegungen als Theil des ganzen menschlichen Körpers, so ändert der Hauptpunkt des Oberarms seine Lage; er ist dann als der Schwerpunkt eines Massensystems aufzufassen, welches dadurch entsteht, dass man im Mittelpunkt des Ellbogengelenks die Masse von Unterarm und Hand und im Mittelpunkt des Schultergelenks die

zweites Massensystem von der Masse $m_0 = m_1 + m_2$. Der Schwerpunkt H_2 dieses Massensystems, welches reducirtes Unterarmsystem genannt sein soll, liegt auf der Längsaxe des Unterarms und theilt die Strecke $\overline{\mathfrak{E}S_2}$ ebenfalls im umgekehrten Verhältniss der Massen von Oberarm einerseits und von Unterarm plus Hand andererseits. Dieser Punkt H_2 stellt den Hauptpunkt des Systems Unterarm plus Hand dar. Seine Entfernungen von $\mathfrak{E}$ und S_2 seien c_2 und e_2. Die Strecke $\overline{\mathfrak{E}H_2}$ soll wieder eine Hauptstrecke des Systems Unterarm plus Hand heissen.

Die Lagen der beiden Hauptpunkte stehen nun in engster Beziehung zu der Lage des Gesammtschwerpunktes S_0 des ganzen Armes.

Setzt man nämlich im Hauptpunkte H_1 die Hauptstrecke $\overline{\mathfrak{E}H_2}$ parallel an, so ist der Endpunkt dieser Strecke der Gesammtschwerpunkt S_0. Dasselbe gilt, wenn man von H_2 aus eine Strecke parallel und gleich der Hauptstrecke $\overline{\mathfrak{E}H_1}$ abträgt. Diese Beziehung ist ganz unabhängig von der Beugestellung im Ellbogengelenk. Es bildet für jede Haltung des Armes das Viereck $H_1 \mathfrak{E} H_2 S_0$ ein Parallelogramm.

Von der Richtigkeit dieser Thatsache kann man sich auf folgende Weise überzeugen.

Der Gesammtschwerpunkt S_0 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Einzelschwerpunkte S_1 und S_2 und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältniss der Massen m_1 und m_2. Denkt man sich S_0 auf Grund dieser Eigenschaft construirt und zieht nun von S_0 aus Parallele zu den Längsaxen $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ der beiden Glieder (vgl. Figur 7), so wird die erste dieser Parallelen die Längsaxe $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ in einem Punkte treffen, welcher die Strecke $\overline{S_1\mathfrak{E}}$ im umgekehrten Verhältniss der Massen m_1 und m_2 theilt, und es wird die zweite Parallele die andere Längsaxe $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ in einem Punkte durchschneiden, welcher die Strecke $\overline{\mathfrak{E}S_2}$ im umgekehrten Verhältniss dieser beiden Massen theilt. Diese beiden Schnittpunkte fallen daher mit den Hauptpunkten der beiden Glieder zusammen.

Massen aller übrigen Theile des ganzen menschlichen Körpers concentrirt annimmt. Der Hauptpunkt rückt infolge dessen dem Schultergelenkmittelpunkt sehr nahe (vergl. Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers, Abhandl. der Kgl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., math.-phys. Classe, Bd. XX. Nr. I.

Eine weitere bemerkenswerthe Eigenschaft der beiden Hauptpunkte ist folgende.

Denkt man sich das System der beiden Glieder ganz frei beweglich, ausser Zusammenhang mit den übrigen Theilen des menschlichen Körpers, so wird der Gesammtschwerpunkt S_0 an seiner Stelle bleiben, wenn man eins der beiden Glieder um die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch seinen Hauptpunkt beliebig dreht und dem anderen Gliede zu gleicher Zeit keine Drehung, sondern nur fortschreitende Bewegung (Parallelverschiebung, Translation) gestattet. Unter fortschreitender Bewegung oder Parallelverschiebung soll dabei eine solche Bewegung verstanden sein, bei welcher alle Geraden innerhalb des Körpers während der Bewegung ihre Richtung im Raume beibehalten. Die einzelnen Punkte des Körpers selbst können natürlich beliebige krumme Linien beschreiben; die Bahnen aller Punkte sind aber congruent. So führt z. B. die Magnetnadel eines Compasses gewöhnlich nur Parallelverschiebung aus, in welcher Weise sich auch das ganze Schiff selbst bewegen möge.

Der angeführte Satz lässt sich leicht einsehen.

Dreht man z. B. den Oberarm um die Axe durch H_1 und erlaubt dem System Unterarm plus Hand nur Parallelverschiebung, so wird bei dieser Bewegung einmal der Punkt H_1 (in Figur 7) fest bleiben und ausserdem die Richtung von $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ sich nicht ändern. Da $H_1 S_0$ parallel $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ ist, so wird demnach die ganze Strecke $H_1 S_0$ und folglich auch ihr Endpunkt S_0 fest bleiben. Dreht man dagegen das System Unterarm plus Hand um die Axe durch seinen Hauptpunkt H_2 mit gleichzeitiger Parallelverschiebung des Oberarms, so wird sowohl der Ort von H_2 als auch die Richtung von $\mathfrak{E}\mathfrak{S}$ erhalten bleiben. Da $H_2 S_0$ stets parallel $\mathfrak{E}\mathfrak{S}$ verläuft, so bleibt daher die ganze Strecke $H_2 S_0$, also auch der Gesammtschwerpunkt S_0 fest.

An der Hand dieses Satzes kann man eine jede beliebige ebene Bewegung des Gliedersystems in drei mechanisch von einander verschiedene Bestandtheile zerlegen.

Handelt es sich um die Bewegung eines einzigen starren Körpers, so zerlegt man dieselbe in die Drehung, welche der Körper um seinen Schwerpunkt ausführt und die Parallelverschiebung des Körpers, welche demselben durch die Bahn des Schwerpunktes vorgeschrieben ist. Bei der Untersuchung der ersteren Bewegungsart

des Körpers nimmt man den Schwerpunkt als festgestellt an, bei der Betrachtung der letzteren Bewegung sieht man ganz von der Drehung der einzelnen Massentheilchen um den Schwerpunkt ab und stellt sich die ganze Masse des Körpers in dem Schwerpunkte concentrirt vor.

Hat man es dagegen mit der, zunächst ganz allgemeinen, Bewegung eines Systems von zwei durch ein Charniergelenk verbundenen Körpern zu thun, wobei also der Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ des Schultergelenks nicht fest zu sein braucht, so genügt es nicht, dieselbe in die Drehung des Systems um den Schwerpunkt und die Parallelverschiebung nach Massgabe der Bewegung des Schwerpunktes zu zerlegen. Denn das System verhält sich bei seiner Bewegung um den Schwerpunkt nicht wie ein starrer Körper. Seine beiden Glieder bewegen sich selbst relativ zu einander und führen infolge dessen verschiedene Drehungen bei festem Gesammtschwerpunkt des Systems aus. Man hat bei der Zerlegung der Bewegung die Drehungen des einen Gliedes von denen des anderen abzusondern.

Dies lässt sich nun nicht einfach so machen, dass man z. B. die Drehung des Oberarms für sich allein betrachtet und dabei sowohl den Unterarm als auch den Gesammtschwerpunkt S_0 als ruhend auffasst. Denn, wenn der Unterarm in Ruhe bleiben soll, so könnte diese Drehung bei den Bedingungen, welche den Bewegungen beider Körper durch die Gelenkverbindungen gesetzt sind, nur um die Charnieraxe stattfinden. Dabei würde aber der Gesammtschwerpunkt S_0 nicht fest bleiben können; derselbe müsste sich, wie man aus Figur 7 bestätigt, in einem Kreise um H_2 als Mittelpunkt und mit $\overline{H_2 S_0}$ als Radius bewegen. Nimmt man aber andererseits den Gesammtschwerpunkt als ruhend an, indem man die Bewegung, welche das System um den Schwerpunkt ausführt, absondern will von der Bewegung, welche dasselbe mit dem Schwerpunkte macht, so erkennt man, dass die Bewegung eines der beiden Glieder nicht isolirt von der Bewegung des anderen betrachtet werden kann. Denn eine jede Bewegung des einen zieht bei ruhendem Gesammtschwerpunkt gleichzeitig eine ganz bestimmte Bewegung des anderen Gliedes nach sich.

Mit Hülfe der Hauptpunkte lassen sich nun die gleichzeitigen Bewegungen der beiden Glieder bei festgehaltenem Gesammtschwer-

punkt in zwei Bewegungsarten zerlegen, bei denen jedesmal nur das eine Glied eine Drehung ausführt, während das andere sich ohne Drehung parallel verschiebt. Man braucht nur die Drehung des einen Gliedes um die zur Gelenkaxe parallele Axe durch seinen Hauptpunkt vor sich gehen zu lassen, dann muss das andere Glied Parallelverschiebung ausführen, wenn der Schwerpunkt des Systems an seiner Stelle bleiben soll.

Demnach hat man eine jede beliebige ebene Bewegung des Systems zweier Glieder zu zerlegen in

1. die Drehung des ersten Gliedes um die zur Gelenkaxe parallele Axe durch seinen Hauptpunkt, verbunden mit gleichzeitiger Parallelverschiebung des zweiten Gliedes;

2. die Drehung des zweiten Gliedes um die zur Gelenkaxe parallele Axe durch seinen Hauptpunkt, verbunden mit gleichzeitiger Parallelverschiebung des ersten Gliedes;

3. die Parallelverschiebung des ganzen Systems nach Massgabe der Bewegung des Gesammtschwerpunktes.

Die ersten beiden Bewegungsarten des Systems stellen zusammen die Bewegung desselben um den Gesammtschwerpunkt dar.

Mit Hülfe dieser Zerlegung der Bewegung des Gliedersystems kann man sich leicht die Grösse der kinetischen Energie oder lebendigen Kraft verschaffen, welche das System bei irgend welcher Bewegung besitzt. Die Kenntniss der lebendigen Kraft des Systems vermittelt aber ihrerseits die Kenntniss des Zusammenhangs, welcher zwischen den am Körpersystem angreifenden Kräften und den dadurch hervorgerufenen Bewegungen besteht.

Die lebendige Kraft, welche ein Körper oder ein System von Körpern infolge seiner Bewegung aufweist, stellt sich als Summe zweier Bestandtheile dar. Der eine Bestandtheil ist die lebendige Kraft, welche der Körper oder das Körpersystem bei seiner Bewegung um den Gesammtschwerpunkt besitzt. Der andere Bestandtheil ist gleich der lebendigen Kraft, welche ein materieller Punkt von der Gesammtmasse des in Frage stehenden Körpers oder Körpersystems entwickelt, wenn er sich mit der Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes bewegt. Der erste Bestandtheil ist von der Bewegung des Gesammtschwerpunktes unabhängig; dagegen kommt bei demselben die Massengruppirung um den Schwerpunkt und die

Bewegung der einzelnen Massentheilchen relativ zum Schwerpunkte zur Geltung. Auf die Grösse des anderen Bestandtheiles hat im Gegentheil die Massenvertheilung und die Bewegung um den Schwerpunkt gar keinen Einfluss; er hängt allein von der Gesammtgrösse der Masse und der Bewegung des Gesammtschwerpunktes ab.

Daher kann man einerseits zur Bestimmung des ersten Bestandtheiles den Gesammtschwerpunkt als ruhend auffassen, andererseits kann man für die Ableitung des zweiten Bestandtheiles der lebendigen Kraft die Annahme machen, dass die gesammte Masse des Körpers oder Körpersystems im Gesammtschwerpunkte concentrirt sei.

Was nun die Ermittelung des ersten Bestandtheiles, d. h. der lebendigen Kraft der Bewegung relativ zum Gesammtschwerpunkte, anlangt, so hat man zu unterscheiden, ob es sich um die Bewegung eines einzigen Körpers oder eines Systems von Körpern handelt.

Bei einem einzigen Körper kann die Bewegung relativ zum Schwerpunkt nur in einer Drehung des ganzen Körpers um eine durch den Schwerpunkt hindurchgehende Axe bestehen. Im Allgemeinen wird diese Drehungsaxe während der Bewegung des Körpers fortwährend ihre Lage und Richtung im Raume und auch die Richtung im Körper verändern. In besonders einfachen Fällen, z. B. bei ebener Bewegung des Körpers, bleibt die Axe im Körper fest und behält ihre Richtung im Raume bei. Die lebendige Kraft, welche ein sich um eine Axe drehender Körper besitzt, wird gemessen durch das halbe Product aus dem Trägheitsmoment des Körpers[1]) in Bezug auf die Drehungsaxe und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Drehung. Ist die Masse des Körpers m, der Trägheitsradius desselben in Bezug auf die Axe durch den Schwerpunkt $\varkappa$ und die Winkelgeschwindigkeit der Drehung w, so hat demnach der Bestandtheil T_r der gesammten lebendigen Kraft, welcher aus der Drehung des Körpers um den Schwerpunkt resultirt, den Werth

$$T_r = \tfrac{1}{2} m \varkappa^2 \cdot w^2.$$

Im Allgemeinen ändert sich diese Grösse im Verlaufe der Be-

1) Ueber die Bedeutung des Trägheitsmomentes und Trägheitsradius eines Körpers vergleiche man: W. BRAUNE und O. FISCHER, Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder. Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XVIII, Nr. VIII, 1892.

wegung; sie ist nur dann constant, wenn entweder die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt fest bleibt, und gleichzeitig die Drehung mit constanter Geschwindigkeit vor sich geht, oder wenn bei veränderlicher Axenrichtung der Trägheitsradius $\varkappa$ und die Winkelgeschwindigkeit w sich im umgekehrten Verhältniss ändern, so dass das Product $\varkappa w$ seinen Werth beibehält.

Der zweite Bestandtheil T_0 der gesammten lebendigen Kraft, welcher der Bewegung des Schwerpunktes entspricht, wird gemessen durch das halbe Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate der Geschwindigkeit v_0, mit welcher der Schwerpunkt im Raume fortschreitet. Er besitzt daher die Grösse

$$T_0 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 .$$

Bezeichnet man die gesammte lebendige Kraft des Körpers mit T, so ist infolge dessen

$$T = \tfrac{1}{2} m \varkappa^2 w^2 + \tfrac{1}{2} m v_0^2 .$$

Handelt es sich dagegen um die Bewegung eines Systems von zwei durch ein Charniergelenk verbundenen Körpern, wie es durch die Figuren 6 und 7 dargestellt ist, so setzt sich der Ausdruck für die gesammte lebendige Kraft aus mehr Gliedern zusammen. Man kann zwar auch hier zwei Bestandtheile unterscheiden, von denen der eine die lebendige Kraft T_r der Bewegung relativ zum Gesammtschwerpunkt und der andere die lebendige Kraft T_0 darstellt, welche aus der Bewegung des Gesammtschwerpunktes hervorgeht. Dabei ist aber der erste dieser beiden Bestandtheile nicht durch ein einziges Product zu messen, weil das Körpersystem sich bei seiner Drehung um den Gesammtschwerpunkt nicht wie ein einziger starrer Körper verhält. Die beiden das System zusammensetzenden Körper führen im Allgemeinen ganz verschiedenartige Bewegungen relativ zum Gesammtschwerpunkte aus, wie schon oben auseinander gesetzt wurde. Es zerfällt daher der erste Bestandtheil T_r der gesammten lebendigen Kraft des Systems abermals in zwei gesonderte Theile, von denen der eine der Bewegung des einen Körpers (Oberarms) und der andere der Bewegung des anderen Körpers (Unterarms plus Hand) relativ zum Gesammtschwerpunkte S_0 (Figur 7) entspricht. Da bei der Bewegung des Oberarms relativ zum Gesammtschwerpunkt der Einzelschwerpunkt S_1 des Gliedes nicht in Ruhe

verharren kann, sondern selbst Bewegung relativ zu S_0 ausführen muss, und da ferner das Entsprechende für den Einzelschwerpunkt S_2 von Unterarm plus Hand gilt, so zerfällt endlich jeder der beiden Theile von T_r abermals in zwei Bestandtheile, nämlich in die lebendige Kraft, welche von der Drehung des betreffenden Gliedes um eine Axe durch seinen Einzelschwerpunkt herrührt, und die lebendige Kraft, welche aus der Bewegung des Einzelschwerpunktes relativ zu dem Gesammtschwerpunkte des ganzen Systems resultirt. Man erhält infolgedessen T_r als Summe von vier Gliedern, nämlich:

1. der lebendigen Kraft, welche der Oberarm bei seiner Drehung um seinen Schwerpunkt S_1 besitzt;

2. der lebendigen Kraft, welche der Oberarm infolge der Bewegung seines Schwerpunktes S_1 relativ zu S_0 besitzt, wobei in S_1 die Masse m_1 des Oberarms concentrirt angenommen werden kann;

3. der lebendigen Kraft, welche das System Unterarm plus Hand bei seiner Drehung um seinen Schwerpunkt S_2 besitzt, und

4. der lebendigen Kraft, welche das System Unterarm plus Hand infolge der Bewegung seines Schwerpunktes S_2 relativ zu S_0 besitzt, wobei wiederum die Masse m_2 desselben in S_2 concentrirt gedacht werden kann.

Bezeichnet man mit $\varkappa_1$ den Trägheitsradius des Oberarms in Bezug auf die momentane Drehungsaxe durch S_1, welcher nach den früheren Untersuchungen ebenso wie der folgende Trägheitsradius $\varkappa_2$ ein Hauptträgheitsradius ist, und mit φ_1' die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um diese Axe, ferner mit v_1 die Geschwindigkeit, mit welcher sich S_1 relativ zu S_0 fortbewegt, und bezeichnet man ferner mit $\varkappa_2$, φ_2' und v_2 die entsprechenden Grössen für die zu S_0 relative Bewegung des Systems Unterarm plus Hand, so ergiebt sich nach den früheren Entwickelungen als Werth der lebendigen Kraft T_r des ganzen Systems relativ zum Gesammtschwerpunkt

$$T_r = \tfrac{1}{2} m_1 \varkappa_1^2 \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \varkappa_2^2 \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 .$$

Die Geschwindigkeiten v_1, v_2, welche die beiden Einzelschwerpunkte in ihrer Bewegung relativ zu S_0 besitzen, müssen sich nun durch die Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' der Drehungen der beiden Glieder um ihre Schwerpunkte ausdrücken lassen. Dies geht daraus hervor, dass durch diese beiden Winkelgeschwindigkeiten die Be-

wegung des ganzen Systems um S_0 vollständig bestimmt ist, was sich mit Hülfe der Hauptpunkte H_1, H_2 der beiden Glieder an der Hand der Figur 7 leicht einsehen lässt. Wie oben abgeleitet worden ist, bleiben bei jeglicher Bewegung des Systems die beiden Strecken $S_0 H_2$ und $S_0 H_1$ stets beziehungsweise parallel den Längsaxen $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$. Daher werden diese beiden Strecken sich immer mit denselben Winkelgeschwindigkeiten um S_0 drehen, mit welchen $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ um ihre Schwerpunkte S_1 und S_2 Drehungen ausführen. Da S_0 zur Bestimmung von T_r als fest anzusehen ist, so braucht man nur $S_0 H_2$ und $S_0 H_1$ mit den Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2' um S_0 zu drehen, dann werden die beiden Längsaxen, welche ja durch die Hauptpunkte mit diesen beiden Strecken verbunden sind, sich in ganz bestimmter Weise dieser Bewegung anschliessen, so dass also die Bewegungsgeschwindigkeiten der Einzelschwerpunkte S_1 und S_2 in ganz bestimmter Weise mit den Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' zusammenhängen.

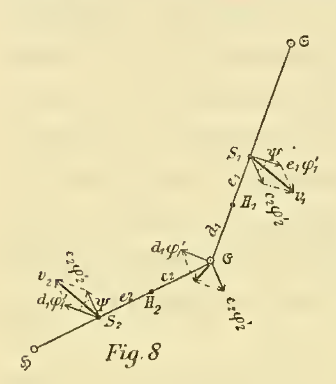
Die Hauptpunkte geben nun wieder das Mittel an die Hand, diesen Zusammenhang in anschaulicher Weise klar zu legen.

Wie früher auseinandergesetzt worden ist, kann man jede Bewegung des Systems der beiden Glieder relativ zum Gesammtschwerpunkt zerlegen in eine Drehung des Oberarms um die zur Gelenkaxe des Ellbogengelenks parallele Axe durch seinen Hauptpunkt H_1, verbunden mit gleichzeitiger Parallelverschiebung von Unterarm plus Hand, und in eine Drehung von Unterarm plus Hand um die durch seinen Hauptpunkt H_2 hindurchgehende und der Gelenkaxe des Ellbogengelenks parallele Axe, verbunden mit gleichzeitiger Parallelverschiebung des Oberarms. Die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Drehungen um H_1 bezüglich H_2 sind φ_1' bezüglich φ_2'.

Bei jeder dieser beiden Drehungen, verbunden mit Parallelverschiebung des nicht gedrehten Gliedes, wird nun sowohl S_1 als S_2 eine Bewegung auf einem Kreise ausführen, deren lineare Geschwindigkeit an jeder Stelle die Richtung der Tangente der betreffenden Kreisbahn besitzt.

Infolge der Drehung um H_1 wird sich S_1 auf einem Kreise um H_1 mit dem Radius e_1 (vergl. Figur 8 auf Seite 120) bewegen. Die Richtung dieser Bewegung steht immer senkrecht zu $H_1 S_1$, die Geschwindigkeit derselben wird gemessen durch das Product $e_1 \varphi_1'$. Gleichzeitig werden

sämmtliche Punkte von Unterarm plus Hand infolge der begleitenden Parallelverschiebung dieses Gliedes Kreisbahnen beschreiben, welche unter sich congruent sind, wenn sie auch natürlich für zwei von einander entfernte Punkte des Unterarms nicht zusammenfallen können, sondern um den Abstand dieser Punkte verschoben sein müssen. Die Gestalt der Bahn, die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung wird aber für alle Punkte vom System Unterarm plus Hand die gleiche sein. So wird also S_2 genau dieselbe Geschwindigkeit, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach, besitzen wie z. B. der Punkt $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe. Dieser letztere Punkt beschreibt bei der Drehung um H_1 einen Kreis um H_1 mit dem Radius d_1. Die Richtung seiner Bewegung steht daher senkrecht zu $H_1\mathfrak{E}$, oder, da $\mathfrak{E}$, H_1 und S_1 in gerader Linie liegen, ebenfalls senkrecht zu $H_1 S_1$; dieselbe ist aber entgegengesetzt der Bewegungsrichtung von S_1. Die Geschwindigkeit der Bewegung von $\mathfrak{E}$ infolge der Drehung um H_1 ist $d_1\varphi'_1$. Genau dieselbe Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit besitzt S_2; ein Unterschied besteht nur insofern, als der Mittelpunkt der Kreisbahn von S_2 um dieselbe Strecke und in derselben Richtung gegen H_1 verschoben ist wie der Punkt S_2 gegen $\mathfrak{E}$.


Fig. 8

Infolge der Drehung von Unterarm plus Hand um H_2 wird sich dagegen S_2 auf einem Kreise um H_2 mit dem Radius e_2 bewegen. Die Richtung dieser Bewegung steht senkrecht zu $H_2 S_2$, ihre Geschwindigkeit besitzt die Grösse $e_2\varphi'_2$. Da während dieser Drehung der Oberarm nur Parallelverschiebung ausführen soll, so wird der Schwerpunkt S_1 des Oberarms dabei dieselbe Bewegung ausführen als $\mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{E}$ jetzt als Punkt des Oberarms aufzufassen ist. $\mathfrak{E}$ beschreibt aber infolge der Drehung um H_2 einen Kreis um H_2 mit dem Radius c_2. Seine Bewegungsrichtung steht senkrecht auf $H_2\mathfrak{E}$ und ist der soeben angeführten Bewegungsrichtung von S_2 entgegengesetzt; seine Geschwindigkeit beträgt $c_2\varphi'_2$.

Wir erhalten somit für jeden der beiden Einzelschwerpunkte zwei Geschwindigkeiten, welche derselbe gleichzeitig in seiner Bewegung relativ zum Gesammtschwerpunkte S_0 besitzen soll. Diese

Geschwindigkeiten haben verschiedene Richtungen; sie setzen sich daher nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu einer resultirenden Geschwindigkeit zusammen. Da für jeden der beiden Einzelschwerpunkte die eine Geschwindigkeit senkrecht zur Längsaxe des Oberarms und die andere senkrecht zur Längsaxe des Unterarms gerichtet ist, so bilden dieselben, wie man aus Figur 8 erkennt, denselben Winkel mit einander, um welchen die Längsaxe des Unterarms gegen die Verlängerung der Längsaxe des Oberarms geneigt ist. Dies ist aber der früher mit ψ bezeichnete Winkel. Man hat daher für die Quadrate der beiden mit v_1 und v_2 bezeichneten resultirenden Geschwindigkeiten der beiden Einzelschwerpunkte nach dem Satze vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten:

$$v_1^2 = e_1^2 \varphi_1'^2 + c_2^2 \varphi_2'^2 + 2 e_1 \varphi_1' c_2 \varphi_2' \cdot \cos\psi$$

$$v_2^2 = d_1^2 \varphi_1'^2 + e_2^2 \varphi_2'^2 + 2 d_1 \varphi_1' e_2 \varphi_2' \cdot \cos\psi .$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für T_r ein und ordnet die Glieder nach $\varphi_1'^2$, $\varphi_2'^2$ und $\varphi_1'\varphi_2'$, so ergiebt sich

$$T_r = \tfrac{1}{2}[m_1(\varkappa_1^2 + e_1^2) + m_2 d_1^2]\,\varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2}[m_2(\varkappa_2^2 + e_2^2) + m_1 c_2^2]\,\varphi_2'^2 + [m_1 e_1 c_2 + m_2 e_2 d_1] \cos\psi \cdot \varphi_1' \varphi_2' .$$

Dabei haben die in eckige Klammern eingeschlossenen Grössen constante, von der Grösse und Vertheilung der Massen abhängige Werthe. Die Bedeutung derselben lässt sich wieder unter Zuhülfenahme der Hauptpunkte leicht erkennen. Der Hauptpunkt H_1 des Oberarms ist der Schwerpunkt des reducirten Oberarmsystems (vergl. Seite 111). Das letztere wird erhalten, wenn man im Punkte $\mathfrak{E}$ die Masse von Unterarm und Hand concentrirt und dem Oberarm hinzugefügt denkt. Es ergiebt sich nun, dass der Factor von $\frac{1}{2}\varphi_1'^2$ im Ausdrucke für T_r das Trägheitsmoment des reducirten Oberarmsystems in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch den Hauptpunkt H_1 des Oberarms darstellt. Entsprechend der Entstehung des reducirten Oberarmsystems setzt sich dieses Trägheitsmoment zusammen aus dem Trägheitsmoment des Oberarms in Bezug auf die Axe durch H_1 und dem Trägheitsmoment der im Punkte $\mathfrak{E}$ concentrirt gedachten Massen von Unterarm und Hand in Bezug auf dieselbe Axe. Da der Trägheitsradius des Oberarms in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch seinen Schwerpunkt S_1 mit $\varkappa_1$ bezeichnet worden

ist, so ist das Trägheitsmoment des Oberarms für die in der Entfernung e_1 vom Schwerpunkte S_1 verlaufende Axe durch den Hauptpunkt H_1 gleich

$$m_1(\varkappa_1^2 + e_1^2).$$ [1]

Ferner besitzt das Trägheitsmoment der im Punkte $\mathfrak{E}$ concentrirten Massen von Unterarm und Hand in Bezug auf die Axe durch H_1 infolge des Abstandes d_1 des Punktes $\mathfrak{E}$ von H_1 den Werth:

$$m_2 d_1^2 .$$

Die Summe dieser beiden Trägheitsmomente giebt in der That den Factor von $\frac{1}{2}\varphi_1'^2$ im Ausdrucke für T_r. Die Grösse dieses Gesammtträgheitsmomentes kann man sich durch Einführung des Trägheitsradius für das reducirte Oberarmsystem veranschaulichen. Unter dem Trägheitsradius k_1 des letzteren in Bezug auf die Axe durch seinen Schwerpunkt H_1 hat man dabei diejenige Entfernung zu verstehen, in welcher die Gesammtmasse des reducirten Oberarmsystems von der Axe durch H_1 angebracht werden müsste, um das dem System zukommende Trägheitsmoment zu erhalten[2]). Da die Gesammtmasse des reducirten Oberarmsystems $m_1 + m_2$ oder m_0 ist, so stellt sich das Trägheitsmoment in der Form $m_0 k_1^2$ dar. Die Grösse des Trägheitsradius ergiebt sich aus der Gleichheit

$$m_0 k_1^2 = m_1(\varkappa_1^2 + e_1^2) + m_2 d_1^2 .$$

Durch eine ganz entsprechende Ueberlegung ergiebt sich, dass der in eckiger Klammer stehende Factor von $\frac{1}{2}\varphi_2'^2$ in dem Ausdrucke für T_r das Trägheitsmoment des reducirten Unterarmsystems (vgl. Seite 112) in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_2 darstellt. Denn einmal ist $m_2(\varkappa_2^2 + e_2^2)$ das Trägheitsmoment von Unterarm plus Hand in Bezug auf diese Axe, welche vom Schwerpunkte S_2 die Entfernung e_2 besitzt. Und dann ist $m_1 c_2^2$ das Trägheitsmoment der im Punkte $\mathfrak{E}$ concentrirt gedachten Masse des Oberarms für dieselbe Axe, weil $\mathfrak{E}$ von der letzteren den Abstand c_2 besitzt. Bezeichnet man mit k_2 den Trägheitsradius des reducirten Unterarmsystems in Bezug auf die Axe durch seinen Schwerpunkt H_2,

1) Vgl. die Arbeit über: Die Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers u. s. w. pag. 424, Z. 5 v. u.

2) l. c. pag. 418.

so ist das Trägheitsmoment selbst durch $m_0 k_2^2$ dargestellt; denn die Masse des reducirten Unterarmsystems ist wieder $m_1 + m_2$ oder m_0. Die Grösse von k_2 berechnet sich hierbei aus der Gleichheit

$$m_0 k_2^2 = m_2(\varkappa_2^2 + e_2^2) + m_1 c_2^2 .$$

Endlich lässt sich auch noch der Factor von $\cos\psi \,.\, \varphi_1' \varphi_2'$ im Ausdrucke für T_r mit Hülfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken auf eine einfachere Form bringen.

Da H_1 der Schwerpunkt des reducirten Oberarmsystems ist, so müssen die statischen Momente der in S_1 bezüglich ℭ concentrirt zu denkenden Massen m_1 bezüglich m_2 in Bezug auf H_1 gleich sein. Es muss also stattfinden

$$m_1 e_1 = m_2 d_1 .$$

In ganz entsprechender Weise müssen für den Schwerpunkt H_2 des reducirten Unterarmsystems die statischen Momente der in S_2 bezüglich ℭ concentrirt zu denkenden Massen m_2 bezüglich m_1 gleich sein. Es muss also stattfinden

$$m_2 e_2 = m_1 c_2 .$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen lässt sich der Factor von $\cos\psi \,.\, \varphi_1' \varphi_2'$ in der Form schreiben

$$m_2 d_1 c_2 + m_1 c_2 d_1 = (m_2 + m_1)\, d_1 c_2 = m_0 d_1 c_2 .$$

Man hat daher für die lebendige Kraft T_r der Bewegung des Systems der beiden durch die Ellbogenaxe mit einander verbundenen Körper den einfacheren Ausdruck:

$$T_r = \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 d_1 c_2 \cos\psi \cdot \varphi_1' \varphi_2' .$$

Es ist zu beachten, dass hierbei die Grössen m_1 und m_2 der Massen von Oberarm einerseits und dem System Unterarm plus Hand andererseits gar nicht mehr gesondert, sondern nur in ihrer Summe m_0 vorkommen. Der Einfluss, welchen die Werthe von m_1 und m_2 auf den Werth der lebendigen Kraft T_r ausüben, macht sich nur in den Grössen der Trägheitsradien k_1 und k_2 der beiden reducirten Systeme und in den Grössen der Hauptstrecken d_1, c_2 geltend.

Die drei Glieder, aus denen sich die gesammte lebendige Kraft der Bewegung des Systems der zwei Glieder relativ zum Gesammtschwerpunkte S_0 zusammensetzt, haben folgende Bedeutung:

Es ist $\frac{1}{2} m_0 k_1^2 \varphi_1'^2$ die lebendige Kraft, welche das reducirte Ober-

armsystem bei seiner Drehung um die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch den Hauptpunkt H_1 des Oberarms mit der Winkelgeschwindigkeit φ_1' besitzt.

Ferner ist $\frac{1}{2} m_0 k_2^2 \varphi_2'^2$ die lebendige Kraft der Drehung des reducirten Unterarmsystems mit der Winkelgeschwindigkeit φ_2' um die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch den Hauptpunkt H_2 von Unterarm plus Hand.

Das dritte Glied $m_0 d_1 c_2 \cos\psi \,.\, \varphi_1' \varphi_2'$ endlich ist eine Grösse, in welcher der Einfluss, den der Grad der Beugung im Ellbogengelenk auf die lebendige Kraft des Systems ausübt, zur Geltung kommt, während die beiden ersten Glieder von dieser Beugestellung ganz unabhängig sind. Dass die lebendige Kraft des Systems eine andere sein wird, wenn der Arm im Ellbogengelenk gestreckt ist, als wenn der Unterarm gegen den Oberarm gebeugt ist, und dass dieselbe sich mit veränderter Beugestellung auch ändern wird, war von vornherein zu erwarten. Das Glied $m_0 d_1 c_2 \cos\psi \,.\, \varphi_1' \varphi_2'$ zeigt nun, in welcher Weise die Grösse der lebendigen Kraft T_r von dem Beugungswinkel abhängt. Ist der letztere gleich Null, d. h. befindet sich der Unterarm gegen den Oberarm in der äussersten Streckstellung, so ist $\cos\psi = 1$, und das dritte Glied besitzt den Werth $m_0 d_1 c_2 \varphi_1' \varphi_2'$. Dies ist der grösste Werth, den dieses dritte Glied und infolge dessen die lebendige Kraft T_r überhaupt für bestimmte Winkelgeschwindigkeiten annehmen kann; denn $\cos\psi$ kann nie grösser wie 1 werden. Für die rechtwinklige Beugestellung im Ellbogengelenk ist $\psi = 90^\circ$ und daher $\cos\psi = 0$. In diesem Falle wird daher die lebendige Kraft direct gleich der Summe der lebendigen Kräfte der beiden reducirten Systeme bei ihren Drehungen um die zur Ellbogenaxe parallelen Axen durch die beiden Hauptpunkte. Ist der Unterarm über die rechtwinklige Stellung zum Oberarm hinaus gebeugt, so wird ψ grösser wie 90°, und $\cos\psi$ nimmt dann einen negativen Werth an.

Daraus geht hervor, dass bei gleich bleibenden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' die lebendige Kraft der Bewegung des Gliedersystems relativ zum Gesammtschwerpunkt continuirlich kleiner wird, während der Unterarm aus der äussersten Streckstellung in die äusserste Beugestellung gegen den Oberarm übergeht, und dass sie also einerseits ihren grössten Werth für die äusserste Streckstellung, andererseits

seits ihren kleinsten Werth für die äusserste Beugestellung im Ellbogengelenk besitzt.

Bisher haben wir erst die lebendige Kraft T_r für die Bewegung der beiden durch ein Charniergelenk verbundenen Glieder relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 betrachtet. Im Allgemeinen wird nun bei den Bewegungen des Gliedersystems S_0 nicht fest bleiben, sondern selbst eine Bewegung ausführen, deren Geschwindigkeit durch v_0 bezeichnet sein soll. Es kommt dann, wie bei der Bewegung eines einzigen starren Körpers, für die gesammte lebendige Kraft des Gliedersystems zu T_r noch die lebendige Kraft T_0 hinzu, welche der Gesammtschwerpunkt infolge seiner Geschwindigkeit v_0 besitzen würde, wenn in ihm die Gesammtmasse m_0 des Gliedersystems vereinigt wäre. Der Werth dieser lebendigen Kraft ist, wie schon früher dargelegt wurde (Seite 117),

$$T_0 = \tfrac{1}{2} m_0 v_0^2 .$$

Man hat infolge dessen für die gesammte lebendige Kraft T der Bewegung des Gliedersystems:

$$T = T_r + T_0 = \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \varphi_2'^2 + m_0 d_1 c_2 \cos\psi \cdot \varphi_1' \varphi_2' + \tfrac{1}{2} m_0 v_0^2 .$$

Dies gilt ganz allgemein, wie auch die ebene Bewegung des Gliedersystems beschaffen sein möge.

Die Bewegung des Gesammtschwerpunktes S_0 wird nun sowohl von der Bewegung der beiden Abschnitte des Armes als auch von der Bewegung des Rumpfes abhängen. Denkt man sich den Rumpf und den Schultergürtel festgestellt, so ist die Bewegung des Gesammtschwerpunktes allein eine Folge der Drehungen des Oberarms und des Systems Unterarm plus Hand einerseits und der Beugestellung im Ellbogengelenk andererseits. Es muss sich daher in diesem Falle die Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes durch die Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' der Drehungen der beiden Glieder und den Beugungswinkel ψ des Ellbogengelenks ausdrücken lassen.

Dies lässt sich wieder leicht mit Hülfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken bewirken.

Wenn der Rumpf und der Schultergürtel festgestellt sind, so kann das Gliedersystem nur noch solche Bewegungen ausführen, bei denen der Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ des Schultergelenks (Figur 6) seine Lage beibehält. Es vermag daher der Oberarm bei der gemachten

Voraussetzung ebener Bewegung nur Drehungen um die zur Ellbogenaxe parallele Axe des Schultergelenks auszuführen. Erlaubt man aber dem Oberarm nicht, sich im Schultergelenk zu drehen, so ist dadurch der ganze Oberarm festgestellt, und der Unterarm kann sich dann nur um die Ellbogenaxe drehen. Es wäre daher in diesem Falle bedingter Beweglichkeit des Armes zweckmässig, seine Gliederbewegungen zu zerlegen in eine Drehung des Oberarms um die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch $\mathfrak{S}$ mit gleichzeitiger Parallelverschiebung von Unterarm plus Hand und eine Drehung von Unterarm plus Hand um die Ellbogenaxe, während dabei der Oberarm in Ruhe verharrt. Auf diesem Wege liesse sich dann auch leicht der Werth der gesammten lebendigen Kraft des ganzen Armes für die Bewegungen desselben bei feststehendem Schultergelenkmittelpunkt direct ableiten. Darauf soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingegangen sein. Es soll dagegen diese Zerlegung der Bewegungen um den Schultergelenkmittelpunkt benutzt werden, um die Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes mit Hülfe der Hauptpunkte durch die beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' und den Beugungswinkel ψ im Ellbogengelenk darzustellen.

Bei der Drehung des Oberarms um $\mathfrak{S}$ mit gleichzeitiger Parallelverschiebung von Unterarm plus Hand führt der Gesammtschwerpunkt S_0 genau dieselbe Bewegung aus wie der Hauptpunkt H_1 des Oberarms; denn bei dieser Bewegung muss die Strecke $H_1 S_0$ (Figur 9) ebenso wie die Längsaxe $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ ihre Richtung beibehalten. Dreht sich der Oberarm mit der Winkelgeschwindigkeit φ_1', so besitzt H_1 und infolge dessen auch S_0 die lineare Geschwindigkeit $c_1 \varphi_1'$.

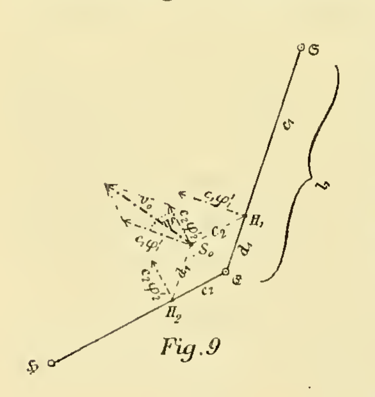


Fig. 9

Bei der Drehung des Unterarms um $\mathfrak{E}$, während der Oberarm in Ruhe bleibt, wird dagegen S_0 dieselbe Bewegung ausführen müssen, wie der Hauptpunkt H_2 von Unterarm plus Hand. Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Strecke $H_2 S_0$, welche stets parallel $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ bleibt, ihre Richtung bei dieser Bewegung beibehalten muss. Da die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Unterarms den Werth φ_2' besitzen soll, so wird H_2 und folglich auch S_0 in diesem Falle mit der linearen Geschwindig-

keit $c_2\varphi_2'$ fortschreiten. Bei gleichzeitiger Drehung der beiden Glieder muss daher S_0 gleichzeitig zwei Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $c_1\varphi_1'$ und $c_2\varphi_2'$ ausführen. Da die Richtungen derselben mit einander denselben Winkel ψ bilden, um welchen die Längsaxe des Unterarms gegen die Verlängerung der Längsaxe des Oberarms geneigt ist, wie man leicht an der Hand der Figur 9 bestätigt, so setzen sich beide Geschwindigkeiten nach dem Satze vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu der resultirenden Geschwindigkeit v_0 zusammen, deren Quadrat den Werth besitzt:

$$v_0^2 = c_1^2\varphi_1'^2 + c_2^2\varphi_2'^2 + 2c_1\varphi_1'c_2\varphi_2' \cdot \cos\psi .$$

Es ist also damit die Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes S_0 durch die beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' und den Beugungswinkel ψ ausgedrückt. Ausser diesen drei veränderlichen Grössen kommen in dem Ausdruck nur noch die beiden constanten Hauptstrecken c_1 und c_2 vor.

Setzt man den Werth von v_0^2 in den Ausdruck für die gesammte lebendige Kraft T des Gliedersystems auf Seite 125 ein und fasst die Glieder mit $\varphi_1'^2$, $\varphi_2'^2$ und $\varphi_1'\varphi_2'$ zusammen, so folgt:

$$T = \tfrac{1}{2}m_0(k_1^2 + c_1^2)\varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_0(k_2^2 + c_2^2)\varphi_2'^2 + m_0(c_1 + d_1)c_2\cos\psi \cdot \varphi_1'\varphi_2'.$$

Die drei Glieder lassen sich auch hier wieder in etwas einfacherer Form schreiben.

Da $m_0k_1^2$ das Trägheitsmoment des reducirten Oberarmsystems in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_1 ist, so stellt $m_0(k_1^2 + c_1^2)$ das Trägheitsmoment des reducirten Oberarmsystems in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe des Schultergelenks dar. Bezeichnet man mit λ_1 den zugehörigen Trägheitsradius, so kann man auch $m_0\lambda_1^2$ an Stelle von $m_0(k_1^2 + c_1^2)$ setzen, denn es ist dann $\lambda_1^2 = k_1^2 + c_1^2$.

Ferner bedeutet $m_0(k_2^2 + c_2^2)$ das Trägheitsmoment des reducirten Unterarmsystems in Bezug auf die Ellbogenaxe, welche ja von dem Schwerpunkte H_2 dieses Systems den Abstand c_2 besitzt. Ist λ_2 der zugehörige Trägheitsradius, so kann man einfacher $m_0\lambda_2^2$ an Stelle von $m_0(k_2^2 + c_2)$ setzen, wobei

$$\lambda_2^2 = k_2^2 + c_2^2 .$$

Endlich stellt $c_1 + d_1$ die Länge l_1 des Oberarms dar. Berück-

sichtigt man dies und setzt gleichzeitig für ψ nach Seite 110 seinen Wert $\varphi_2 - \varphi_1$ ein, so hat man

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \varphi_2'^2 + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_1' \varphi_2' .$$

Die beiden ersten Glieder sind wieder unabhängig von der Beugestellung im Ellbogengelenk. $\frac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \varphi_1'^2$ bedeutet die lebendige Kraft des reducirten Oberarmsystems in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe des Schultergelenks, und $\frac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \varphi_2'^2$ die lebendige Kraft des reducirten Unterarmsystems in Bezug auf die Ellbogenaxe selbst. Das letzte Glied lässt dagegen wieder den Einfluss erkennen, welchen die Beugestellung im Ellbogengelenk auf die Grösse der gesammten lebendigen Kraft ausübt. Es ergiebt sich auch für die gesammte lebendige Kraft der Bewegung des Gliedersystems, dass dieselbe am grössten in der Streckstellung und am kleinsten in der äussersten Beugestellung des Armes ist, und dass sie für gleichbleibende Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2' beim Uebergang aus der ersteren der beiden extremen Stellungen in die letztere continuirlich abnimmt.

Durch die bisherigen Entwickelungen ist die gesammte lebendige Kraft der Bewegung des Gliedersystems dargestellt worden als Function des Beugungswinkels ψ oder $\varphi_2 - \varphi_1$ im Ellbogengelenk und der beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2', mit denen sich bei feststehendem Rumpfe der Oberarm einerseits und das System Unterarm plus Hand andererseits im Raume drehen. Es ist dabei φ_1' die Geschwindigkeit, mit welcher sich »der Drehungswinkel des Schultergelenks« (vgl. Seite 110) ändert, oder kurz die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Oberarms gegen den Rumpf im Schultergelenk. Dagegen ist φ_2' keineswegs die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Unterarms gegen den Oberarm im Ellbogengelenk, sondern die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Unterarms relativ zum Rumpfe. Dies beeinträchtigt die Anschaulichkeit der Resultate. Denn man ist in der Anatomie und Physiologie nicht gewöhnt, die Richtungsänderungen der Unterarmlängsaxe auf den Rumpf zu beziehen.

Man achtet vielmehr bei den Bewegungen des Unterarms in erster Linie auf die Drehungen, welche derselbe relativ zum Oberarm ausführt, d. h. also auf die Bewegungen im Ellbogengelenk. Aus der Grösse der Winkelgeschwindigkeit φ_2' allein ist aber keines-

wegs die Winkelgeschwindigkeit der Drehung im Ellbogengelenk direct zu ersehen. Würde z. B. von einer bestimmten Beugestellung im Ellbogengelenk aus Oberarm und Unterarm sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne relativ zum Rumpfe drehen, was dem Falle $\varphi_2' = \varphi_1'$ entsprechen würde, so bliebe dabei die Beugestellung im Ellbogengelenk erhalten. Damit Beugung im Ellbogengelenk stattfindet, ist nothwendig, dass $\varphi_2' > \varphi_1'$ ist. Im Falle, dass $\varphi_2' < \varphi_1'$ wäre, würde trotz der in gleichem Sinne stattfindenden, zum Rumpfe relativen, Drehung beider Glieder Streckung im Ellbogengelenk stattfinden. Die Grösse der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich der Beugungswinkel ψ im Ellbogengelenk bei der Bewegung des Gliedersystems ändert, wird durch die Differenz der beiden Winkelgeschwindigkeiten von Unterarm und Oberarm gemessen. Bezeichnet man diese Winkelgeschwindigkeit mit ψ', so ist demnach

$$\psi' = \varphi_2' - \varphi_1' .$$

Besitzt ψ' einen positiven Werth, so wird das Ellbogengelenk bei der Bewegung stärker gebeugt, bei negativem ψ' wird es dagegen stärker gestreckt. Dies entspricht direct der Beziehung

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1 ,$$

welche besteht zwischen dem Beugungswinkel im Ellbogengelenk einerseits und den beiden Winkeln, welche die Längsaxen von Unterarm und Oberarm mit der zum Rumpfe festen Geraden $\mathfrak{S}A$ (vgl. Figur 6) bilden, andererseits. Die Relation $\psi' = \varphi_2' - \varphi_1'$ kann man nun benutzen, um die gesammte lebendige Kraft der Bewegung des Gliedersystems durch den Beugungswinkel ψ des Ellbogengelenks, die Winkelgeschwindigkeit φ_1' der Drehung des Oberarms im Schultergelenk und die Winkelgeschwindigkeit ψ' der Drehung des Unterarms gegen den Oberarm im Ellbogengelenk auszudrücken. Aus der Relation folgt nämlich

$$\varphi_2' = \psi' + \varphi_1' .$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für T auf Seite 128, gleichzeitig für $\varphi_2 - \varphi_1$ wieder ψ ein und ordnet nach $\varphi_1'^2$, ψ'^2 und $\varphi_1'\psi'$, so folgt, wie man leicht bestätigt, der etwas weniger einfache Ausdruck für die gesammte lebendige Kraft des Gliedersystems:

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi)\, \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \psi'^2 + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\, \varphi_1' \psi' .$$

Die Bedeutung der drei Glieder ist folgende:

Das erste Glied $\frac{1}{2} m_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\, l_1\, c_2 \cos\psi)\, \varphi_1'^2$ ist die lebendige

Kraft des um die Schultergelenkaxe mit der Winkelgeschwindigkeit φ_1' gedrehten Armes, wenn der Unterarm zum Oberarm in der durch den Werth des Winkels ψ charakterisirten Beugestellung im Ellbogengelenk festgestellt ist. Man bestätigt dies unter Zuhülfenahme der Formel für T auf Seite 128, indem man beachtet, dass bei Feststellung des Ellbogengelenks $\varphi_2' = \varphi_1'$ wird. Die Grösse dieses ersten Gliedes hängt daher von der Beugestellung im Ellbogengelenk ab; sie vermindert sich bei wachsendem ψ, d. h. bei zunehmender Beugung.

Das zweite Glied $\frac{1}{2}m_0\lambda_2^2\psi'^2$ stellt die lebendige Kraft dar, welche das reducirte Unterarmsystem bei der zum Oberarm relativen Drehung des Unterarms im Ellbogengelenk mit der Winkelbeschleunigung ψ' besitzt. Da beim reducirten Unterarmsystem die Masse des Oberarms in einem Punkte der Ellbogenaxe concentrirt zu denken ist, so hat diese Summe m_1 keinen Einfluss auf die Grösse des Trägheitsmomentes in Bezug auf die Ellbogenaxe. Es wird daher $m_0\lambda_2^2$ denselben Werth besitzen, wie das Trägheitsmoment von Unterarm plus Hand allein in Bezug auf die Ellbogenaxe. Dies lässt sich auch aus den Beziehungen ableiten, welche zwischen den Grössen λ_2, k_2, $\varkappa_2$, e_2, c_2 und den Massen m_0, m_1, m_2 bestehen. Es ist nach Seite 127

$$\lambda_2^2 = k_2^2 + c_2^2.$$

Man hat daher

$$m_0\lambda_2^2 = m_0 k_2^2 + m_0 c_2^2 .$$

Andererseits ist nach Seite 123

$$m_0 k_2^2 = m_2\varkappa_2^2 + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2 .$$

Setzt man ferner für m_0 die Summe $m_1 + m_2$ ein, so folgt:

$$m_0\lambda_2^2 = m_2\varkappa_2^2 + m_2 e_2^2 + m_2 c_2^2 + 2m_1 c_2^2 .$$

Endlich ist nach Seite 123 $m_1 c_2 = m_2 e_2$; man kann daher auch für $2m_1 c_2^2$ schreiben $2m_2 e_2 c_2$. Setzt man dies in den Werth für $m_0\lambda_2^2$ ein und beachtet, dass $e_2^2 + c_2^2 + 2ec_2$ das Quadrat der Summe $e_2 + c_2$ darstellt, so folgt:

$$m_0\lambda_2^2 = m_2[\varkappa_2^2 + (e_2 + c_2)^2] .$$

Nun ist $e_2 + c_2$ die Entfernung des Schwerpunktes S_2 von Unterarm plus Hand und $\varkappa_2$ der Trägheitsradius dieses Gliedersystems in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch S_2. Folglich stellt $m_2[\varkappa_2^2 + (e_2 + c_2)^2]$ das Trägheitsmoment des Systems Unterarm plus

Hand in Bezug auf die Ellbogenaxe dar. Man kann daher auch sagen:

Das zweite Glied $\frac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \psi'^2$ in dem Ausdrucke für die gesammte lebendige Kraft T des um eine Schultergelenkaxe drehbaren Gliedersystems stellt die lebendige Kraft dar, welche das System Unterarm plus Hand bei seiner zum Oberarm relativen Drehung im Ellbogengelenk mit der Winkelgeschwindigkeit ψ' besitzt.

Das dritte Glied $m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos \psi) \varphi_1' \psi'$ von T giebt zu erkennen, dass es für die Grösse der gesammten lebendigen Kraft nicht gleichgültig ist, von welcher Beugestellung aus die Gelenkbewegung im Ellbogengelenk vor sich geht. Dieses Zusatzglied ist am grössten für die Streckstellung im Ellbogengelenk und nimmt bis zu der äussersten Beugestellung fortwährend ab.

Die beiden auf den Seiten 128 und 129 niedergelegten Ausdrücke für die gesammmte lebendige Kraft des Gliedersystems, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass in dem einen die Winkelgeschwindigkeiten der zum Rumpfe relativen Drehungen von Oberarm und Unterarm plus Hand, in dem anderen dagegen die Winkelgeschwindigkeiten der Gelenkbewegungen im Schulter- und Ellbogengelenk vorkommen, lassen sich auch in der Form schreiben:

$$T = \frac{1}{2} m_0 [\lambda_1^2 \varphi_1'^2 + \lambda_2^2 \varphi_2'^2 + 2 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2']$$

und

$$T = \frac{1}{2} m_0 [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos \psi) \varphi_1'^2 + \lambda_2^2 \psi'^2 + 2 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos \psi) \cdot \varphi_1' \psi'].$$

Dieselben gelten nun nicht allein für den zum festen Schultergürtel in ebener Bewegung drehbaren und im Ellbogengelenk gegliederten Arm. Sie behalten ihre Gültigkeit für alle im menschlichen oder thierischen Körper vorkommenden Systeme von zwei durch ein Charniergelenk mit einander verbundenen Gliedern, von denen das eine nur Bewegungen um einen festen Gelenkmittelpunkt, bezüglich um eine feste Gelenkaxe, ausführen kann. Es ist jedoch dabei zu beachten, dass sie sich nur auf Bewegungen beziehen, welche parallel einer bestimmten Ebene vor sich gehen, und dass sowohl von etwaigen Rollungen der Glieder um ihre Längsaxen als auch von Schwankungen der Axe des Charniergelenks vorläufig abgesehen worden ist. Wenn man sich nun auch durch diese vereinfachenden Annahmen thatsächlich von der Wirklichkeit etwas

entfernt, so ist es doch für das Verständniss der verwickelteren Bewegungserscheinungen am Organismus unerlässlich, dass man sich zunächst vollständige Klarheit über die mechanischen Verhältnisse an möglichst einfachen Fällen verschafft hat. Ohne dieses Fundament wird es selbst für den Mathematiker und Physiker von Fach nicht leicht sein, die Ausdrücke, welche sich in verwickelteren Fällen für die lebendige Kraft des Gliedersystems ergeben, zu deuten und in ihnen nicht blos starre Formeln, praktische Anweisungen zur Berechnung der Grösse der lebendigen Kraft zu sehen.

Was nun speciell die Verhältnisse am Arme des Menschen anlangt, so findet man folgende Werthe für die in Betracht kommenden Grössen[1]:

Masse des Oberarms	$m_1 = 1908$ g
Masse von Unterarm plus Hand	$m_2 = 1775$ g
Gesammtmasse des Arms	$m_0 = 3683$ g
Länge des Oberarms	$l_1 = 30{,}3$ cm
Entfernung des Schwerpunktes S_1 des Oberarms vom Schultergelenkmittelpunkt .	$r_1 = 13{,}6$ cm
Entfernung des Schwerpunktes S_1 des Oberarms vom Ellbogengelenkmittelpunkt .	$s_1 = 16{,}7$ cm
Trägheitsradius des Oberarms in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch seinen Schwerpunkt	$\varkappa_1 = 9{,}4$ cm
Länge des Unterarms (Abstand des Handgelenkmittelpunktes vom Ellbogengelenkmittelpunkt)	$l_2 = 27{,}2$ cm
Entfernung des Schwerpunktes S_2 des Systems Unterarm plus Hand vom Ellbogengelenkmittelpunkt	$r_2 = 19{,}0$ cm
Entfernung des Schwerpunktes S_2 des Systems Unterarm plus Hand vom Handgelenkmittelpunkt	$s_2 = 8{,}2$ cm
Trägheitsradius des Systems Unterarm plus Hand in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch seinen Schwerpunkt .	$\varkappa_2 = 12{,}4$ cm.

Aus diesen direct gemessenen Grössen sind dann die Strecken, welche sich auf die Lage der Hauptpunkte der beiden Glieder beziehen, durch Rechnung abzuleiten.

---

1) Vgl. die Anmerkung auf Seite 74.

Man hat für die Entfernungen c_1, d_1 und e_1 des Oberarm-Hauptpunktes vom Schultergelenkmittelpunkte, Ellbogengelenkmittelpunkte und Schwerpunkte des Oberarms die Relationen

$$m_0 c_1 = m_1 r_1 + m_2 l_1 \text{ [1]}$$
$$m_0 d_1 = m_1 s_1$$
$$m_0 e_1 = m_2 s_1 .$$

Alle drei Relationen folgen ohne Weiteres aus der Eigenschaft des Hauptpunktes, der Schwerpunkt des reducirten Oberarmsystems zu sein. Es ergeben sich daher zur Berechnung der drei Grössen c_1, d_1 und e_1 die Formeln:

$$c_1 = \frac{m_1 r_1 + m_2 l_1}{m_0}$$
$$d_1 = \frac{m_1 s_1}{m_0}$$
$$e_1 = \frac{m_2 s_1}{m_0} .$$

Für die dem Unterarm angehörenden Strecken c_2, e_2 zwischen dem Hauptpunkte von Unterarm plus Hand einerseits, und dem Ellbogengelenkmittelpunkt bezüglich Schwerpunkt von Unterarm plus Hand andererseits, erhält man die ganz entsprechenden Relationen:

$$m_0 c_2 = m_2 r_2 \quad \text{und} \quad m_0 e_2 = m_1 r_2 ,$$

woraus folgt:

$$c_2 = \frac{m_2 r_2}{m_0} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{m_1 r_2}{m_0} .$$

Die Trägheitsradien k_1 und k_2 der beiden reducirten Systeme in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallelen Axen durch ihre Schwerpunkte (Hauptpunkte der beiden Glieder) könnte man nach Berechnung der Grössen e_1, d_1, e_2 und c_2 aus den Relationen auf Seite 122 und 123 gewinnen. Es ist jedoch für die Genauigkeit der Resultate zweckmässiger, sie aus den am Präparat direct gemessenen Grössen abzuleiten. Die Relationen, welche dieses ermöglichen, erhält man aus den auf Seite 122 und 123 niedergelegten, indem man daselbst die obenstehenden Formeln für e_1, d_1, e_2 und c_2 einsetzt. Es ergiebt sich

1) Man vergleiche W. Braune und O. Fischer, Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers u. s. w. Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XV Nr. VII, pag. 605 ff.

dann, wie man nach einer geringen Umformung der zunächst entstehenden Ausdrücke unter Beachtung, dass $m_1 + m_2 = m_0$ ist, erkennt:

$$k_1^2 = \frac{m_1 \varkappa_1^2 + \frac{m_1 m_2}{m_0} s_1^2}{m_0} \quad \text{und} \quad k_2^2 = \frac{m_2 \varkappa_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_0} r_2^2}{m_0}$$

und also für die Trägheitsradien selbst:

$$k_1 = \sqrt{\frac{m_1 \varkappa_1^2 + \frac{m_1 m_2}{m_0} s_1^2}{m_0}} \quad \text{und} \quad k_2 = \sqrt{\frac{m_2 \varkappa_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_0} r_2^2}{m_0}} .$$

Die Quadrate der auf die Axen im Schultergelenk bezüglich Ellbogengelenk bezogenen Trägheitsradien λ_1, λ_2 der beiden reducirten Systeme würden sich aus den Relationen auf Seite 127

$$\lambda_1^2 = k_1^2 + c_1^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 = k_2^2 + c_2^2$$

ergeben. Man kann sie aber ebenfalls aus den direct am Präparat gemessenen Grössen ableiten. Es folgt nämlich unmittelbar aus der Bedeutung von λ_1, λ_2:

$$m_0 \lambda_1^2 = m_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2$$

und

$$m_0 \lambda_2^2 = m_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2) .$$

Man hat daher für die Quadrate dieser beiden Trägheitsradien:

$$\lambda_1^2 = \frac{m_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2}{m_0}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{m_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2)}{m_0}$$

und für die Trägheitsradien selbst:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{m_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2}{m_0}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{m_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2)}{m_0}} .$$

Unter Benutzung aller der Formeln, in welchen nur die am Präparat gemessenen, auf Seite 132 niedergelegten Grössen vorkommen, ergeben sich folgende Werthe

für die Entfernung des Hauptpunktes H_1 des Oberarms

vom Mittelpunkt des Schultergelenks . . $c_1 = 21{,}65$ cm

vom Mittelpunkt des Ellbogengelenks . . $d_1 = 8{,}65$ cm

vom Schwerpunkt des Oberarms. . . . $e_1 = 8{,}05$ cm,

für die Entfernung des Hauptpunktes H_2 des Systems Unterarm plus Hand

vom Mittelpunkt des Ellbogengelenks . . . $c_2 = 9,16$ cm

vom Schwerpunkt von Unterarm plus Hand $e_2 = 9,84$ cm,

für das Quadrat der Trägheitsradien k_1, k_2 der beiden reducirten Systeme in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallelen Axen durch ihre Schwerpunkte (Hauptpunkte der Glieder):

$$k_1^2 = 112,53 \text{ cm}^2$$

$$k_2^2 = 164,24 \text{ cm}^2$$

und für das Quadrat der Trägheitsradien λ_1, λ_2 derselben Massensysteme in Bezug auf die Axen im Schultergelenk bezüglich Ellbogengelenk:

$$\lambda_1^2 = 581,19 \text{ cm}^2$$

$$\lambda_2^2 = 248,08 \text{ cm}^2 .$$

Obgleich für die Trägheitsmomente und die lebendige Kraft des Systems nur die Quadrate der Trägheitsradien gebraucht werden, so sollen doch deren Werthe selbst noch mit angegeben sein, weil dieselben ein bequemes Mittel darbieten, sich über die Art der Massenvertheilung in den reducirten Systemen, so weit sie mechanisch in Betracht kommt, eine Anschauung zu verschaffen. Durch Wurzelausziehen erhält man die Werthe:

$$k_1 = 10,61 \text{ cm} , \qquad k_2 = 12,82 \text{ cm} ,$$
$$\lambda_1 = 24,11 \text{ cm} , \qquad \lambda_2 = 15,75 \text{ cm} .$$

Setzt man die gefundenen numerischen Werthe in die beiden Ausdrücke für die lebendige Kraft T auf Seite 131 ein, lässt aber zunächst noch m_0 für die Gesammtmasse stehen, so ergiebt sich[1])

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 [581,19 \cdot \varphi_1'^2 + 248,08 \cdot \varphi_2'^2 + 554,91 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1'\varphi_2']$$

und

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 [(829,27 + 554,91 \cdot \cos\psi)\varphi_1'^2 + 248,08 \cdot \psi'^2 + \\ + (496,16 + 554,91 \cdot \cos\psi)\varphi_1'\psi'] .$$

Hierbei findet sich die Gesammtmasse m_0 abgesondert von einem Factor, welcher nicht mehr von dem Werthe von m_0 selbst, sondern

1) Bei der Berechnung von $2\, l_1 c_2$ ist nicht der auf zwei Decimalstellen abgerundete Werth von c_2, sondern der Werth von r_2 verwendet worden; da $c_2 = \frac{m_2 r_2}{m_0}$, so folgt nämlich $2\, l_1 c_2 = \frac{2\, m_2 l_1 r_2}{m_0}$.

nur von den Verhältnissen der Massen m_1, m_2 der beiden Glieder untereinander, bezüglich zu der Gesammtmasse des Armes, abhängt. Dies lehrt ein Blick auf die zur Berechnung von λ_1^2, λ_2^2 und c_2 verwendeten Formeln (Seite 134 und 133). Wenn nun auch bei verschiedenen Individuen die Gesammtmasse des Armes sehr verschieden sein kann, so wird doch das Massenverhältniss der einzelnen Gliederabschnitte unter einander viel geringeren individuellen Schwankungen unterworfen sein. Es werden sich daher die numerischen Coefficienten in dem in eckige Klammer eingeschlossenen Factor nur dann im Wesentlichen ändern, wenn man es mit oberen Extremitäten von anderen Längen, nicht aber dann, wenn man es mit solchen von denselben Dimensionen aber anderer Gesammtmasse zu thun hat. Die Länge des Oberarms betrug bei dem in Betracht gezogenen Präparat 30,3 cm. Ist an einem anderen Präparat die Länge des Oberarms grösser oder kleiner, sie sei wieder allgemein mit l_1 bezeichnet, so werden unter sonst gleichen Verhältnissen alle Längen am Arm im Verhältniss $\frac{l_1}{30,3}$ geändert sein. Da die numerischen Coefficienten von $\varphi_1'^2$, $\varphi_2'^2$ u. s. w. durchweg Producte zweier Längenmaasszahlen darstellen, so müsste man diese sämmtlichen Zahlenfactoren mit $\left(\frac{l_1}{30,3}\right)^2$ multipliciren, um die den veränderten Dimensionen entsprechenden numerischen Coefficienten zu erhalten. Giebt man dann auch m_0 den entsprechenden Werth, so kann man auf diese Weise für jede andere obere Extremität die Ausdrücke für die lebendige Kraft der Bewegung ableiten.

Da das Product aus einer Länge und einer Winkelgeschwindigkeit äquivalent einer linearen Geschwindigkeit ist, so erkennt man weiter aus den Formen, in welcher die lebendige Kraft auf Seite 135 geschrieben worden ist, dass die lebendige Kraft des Gliedersystems gleich der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes von der Masse m_0 ist, welcher sich im Raume mit einer Geschwindigkeit fortbewegt, deren Quadrat durch den auf Seite 135 in eckiger Klammer geschriebenen Factor gemessen wird. Ob man den Klammerfactor der ersten oder zweiten Form von T zur Berechnung dieser Geschwindigkeit zu verwenden hat, das kommt ganz darauf an, ob man bei der Bewegung des Gliedersystems die Winkelgeschwindigkeiten der zum Rumpfe relativen Drehungen oder

die Winkelgeschwindigkeiten der Gelenkbewegungen der beiden Gliederabschnitte gemessen hat.

Setzt man nun den für den vorliegenden Fall geltenden Werth $m_0 = 3683$ g in die Ausdrücke für T ein, so ergeben sich endlich die Werthe:

$$T = 1070300 \cdot \varphi_1'^2 + 456800 \cdot \varphi_2'^2 + 1021900 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2'$$

und

$$T = (1527100 + 1021900 \cdot \cos\psi) \cdot \varphi_1'^2 + 456800 \cdot \psi'^2 + \\ + (913600 + 1021900 \cdot \cos\psi) \cdot \varphi_1' \psi' .$$

Bei einer bestimmten Bewegung des Gliedersystems unter der gemachten Voraussetzung fester, zur Ellbogenaxe paralleler, Schultergelenkaxe wird der Werth der lebendigen Kraft sich fortwährend ändern. Um die Grösse derselben für einen bestimmten Moment der Bewegung angeben zu können, muss man sich auf empirischem Wege die diesem Moment entsprechenden Werthe der Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und φ_2' oder φ_1' und ψ' und die Grösse des Beugungswinkels $\varphi_2 - \varphi_1$ oder ψ im Ellbogengelenk verschaffen, und in einen der beiden Ausdrücke für T einsetzen. Da als Grundmaasse für Länge, Masse und Zeit: Centimeter, Gramm und Secunde angenommen worden sind, so gehört zu der Zahl, welche sich bei dieser Rechnung für die lebendige Kraft ergiebt, als Maasseinheit $\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}$.

Die Aenderungen der lebendigen Kraft des Gliedersystems stehen nun in inniger Beziehung zu den inneren und äusseren Kräften, welche auf dasselbe einwirken. Als innere Kräfte des Systems sind dabei unter anderen die Spannungen von Muskeln aufzufassen, welche sich zwischen den beiden Gliedern erstrecken, welche also bei Feststellung des Radio-Ulnargelenks, des Handgelenks und der Gelenke zwischen den Knochen der Hand nur noch über das beweglich gelassene Ellbogengelenk hinwegziehen. Beispiele hierfür bilden der M. brachialis, M. brachioradialis, M. pronator teres, M. extensor carpi radialis longus, das Caput laterale und Caput mediale des M. triceps brachii, der M. anconaeus. Obgleich alle diese Muskeln bei ihrer Contraction auf jeden der beiden als starr angenommenen Abschnitte des Arms eine äussere Kraft ausüben, so stellen dieselben für das ganze Gliedersystem innere Kräfte dar. Dagegen sind die an einem der beiden Armabschnitte ansetzenden Muskeln, welche ihren Ursprung ausser-

halb des Arms, z. B. am Schulterblatt nehmen, auch für das Gliedersystem als äussere Kräfte aufzufassen. Beispiele hierfür bilden die beiden Köpfe des M. biceps brachii, das Caput longum des M. triceps brachii, der M. coracobrachialis, M. deltoideus u. a.

Das Drehungsbestreben, welches ein Muskel bei seiner Contraction für irgend einen Knochen, auf den er einwirkt, besitzt, wird stets durch das Moment eines Kräftepaares gemessen, wie an anderer Stelle ausführlich auseinandergesetzt worden ist[1]. Kann der Muskel sich zwischen seinen Insertionsstellen geradlinig ausspannen, so wirkt er auf Ursprung und Ansatz mit entgegengesetzt gleicher Kraft. Wird er gezwungen an einem oder auch an beiden Knochen zunächst über Knochenvorsprünge hinwegzuziehen, so wirkt er mit entgegengesetzt gleicher Kraft auf die Stellen an den Vorsprüngen der beiden Knochen, zwischen welchen er sich thatsächlich geradlinig ausspannt. Für die Ermittelung des vom Muskel ausgeübten Drehungsbestrebens ist es dann zweckmässig, geradezu diese Stellen an den Knochenvorsprüngen als Insertionsstellen aufzufassen.

Befindet sich der Ursprung des Muskels am Oberarm, der Ansatz an dem als starr aufgefassten System Unterarm plus Hand, so wird das auf den Oberarm einwirkende Kräftepaar gebildet: durch die am Muskelursprung bezüglich an dem betreffenden Knochenvorsprung des Humerus angreifende Kraft einerseits, und eine im Punkte $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe angreifende entgegengesetzt gleiche Kraft andererseits. Entsprechend setzt sich das auf das System Unterarm plus Hand wirkende Kräftepaar zusammen aus der am Muskelansatzpunkte, bezüglich an dem für diesen eintretenden Punkte eines Knochenvorsprungs, angreifenden Kraft und einer im Punkte $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe angreifenden entgegengesetzt gleichen Kraft. Bezeichnet man das Moment des ersteren Kräftepaares mit D_1, dass des letzteren Kräftepaares mit D_2, so ist unter allen Umständen, wo auch sich die Insertionspunkte des Muskels oder die in Frage kommenden Stellen an Knochenvorsprüngen befinden mögen,

$$D_2 = - D_1 ,$$

eine Beziehung, welche man auch in der Form schreiben kann:

$$D_1 + D_2 = 0 .$$

1) O. Fischer, Ueber die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln. Archiv für Anatomie und Physiologie. Anatomische Abtheilung. 1894, Seite 105.

Diese beiden Drehungsmomente müssen also stets entgegengesetzt gleich sein, d. h. sie müssen gleich gross sein, aber Drehungen in entgegengesetztem Drehungssinne verursachen wollen.

Liegt der Ursprung des Muskels ausserhalb des Armes, am Schulterblatt, an der Clavikel u. s. w., der Ansatz dagegen am Unterarm, so wird das Kräftepaar, welches auf den Oberarm einwirkt, dargestellt durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, von denen die eine im Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ angreift und gleich und gleichgerichtet mit der im Muskelursprung angreifenden Kraft ist, während die andere ihren Angriffspunkt wieder im Punkte $\mathfrak{E}$ des Ellbogengelenks besitzt. Auf das Kräftepaar, welches das System Unterarm plus Hand zu drehen strebt, hat die Verlegung des Muskelursprungs ausserhalb des Armes keinen Einfluss. Dasselbe wird wieder durch die im Muskelansatzpunkte angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche in $\mathfrak{E}$ angreifende Kraft gebildet. Bezeichnet man wieder die Momente der beiden Kräftepaare mit D_1 und D_2, so ergiebt sich in diesem Falle keine so einfache Beziehung, wie im Falle eines nur über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskels, es ist also dann im Allgemeinen $D_1 + D_2$ nicht gleich Null.

Befindet sich endlich der Muskelursprung ausserhalb des Armes und der Ansatz am Oberarm, so wird das auf den Oberarm einwirkende Kräftepaar gebildet durch die im Ansatz angreifende Kraft und eine ihr entgegengesetzt gleiche, deren Angriffspunkt im Mittelpunkte $\mathfrak{S}$ des Schultergelenks zu suchen ist. Auf das System Unterarm plus Hand kann ein solcher Muskel selbstverständlich kein Drehungsbestreben ausüben. Es ist daher bei Anwendung analoger Bezeichnung wie bei den anderen Muskelarten $D_2 = 0$, während D_1 im allgemeinen einen bestimmten endlichen Werth besitzt. Hieraus ist zu ersehen, dass auch in diesem Falle keine einfache Beziehung zwischen den beiden Drehungsmomenten vorhanden ist.

Denkt man sich das Ellbogengelenk festgestellt, oder, mit anderen Worten, denkt man sich den ganzen Arm als ein starres Gebilde, so wird ein nur zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm plus Hand sich erstreckender Muskel überhaupt kein Drehungsbestreben ausüben können, da es ja bei Fixirung des Ellbogengelenks den Insertionspunkten eines solchen Muskels nicht gestattet ist, sich zu nähern. Damit ein am Arme ansetzender Muskel drehend auf den

ganzen, als starr aufgefassten Arm einwirkt, ist unbedingt nothwendig, dass sein Ursprung ausserhalb des Arms gelegen ist. Das drehende Kräftepaar wird dann dargestellt durch die im Muskelansatz angreifende Kraft einerseits und eine derselben entgegengesetzt gleiche durch den Schultergelenkmittelpunkt. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob der betreffende Muskel am Unterarm oder am Oberarm ansetzt.

Das Moment dieses Kräftepaares hängt in sehr einfacher Weise mit den Momenten D_1, D_2 der beiden Kräftepaare zusammen, welche die beiden Abschnitte des Arms zu drehen streben. Das erstere ist nämlich gleich der Summe der beiden letzteren.

Dies gilt ganz allgemein, wo auch die Muskelinsertionen sich befinden mögen. Hat man es z. B. mit einem nur zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm plus Hand hinziehenden Muskel zu thun, so ist, wie wir sahen, $D_1 + D_2 = 0$. In der That ist auch das Moment des auf den ganzen Arm mit fixirtem Ellbogengelenk wirkenden Kräftepaares Null, d. h. der Muskel vermag den Arm nicht zu drehen. Setzt der Muskel am Unterarm an, und besitzt er seinen Ursprung ausserhalb des Arms, so kann man das drehende Kräftepaar durch Hinzufügen zweier entgegengesetzt gleicher im Punkte $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe angreifender Kräfte in zwei Kräftepaare zerlegen, deren Momente nach dem Früheren in der That D_1 und D_2 sind. Befindet sich endlich der Ansatz am Oberarm und der Ursprung ausserhalb des Arms, so ist das Drehungsmoment für den ganzen starren Arm, wie man nach den früheren Auseinandersetzungen bestätigt, gleich dem Drehungsmoment D_1, welches der Muskel auf den Oberarm allein ausübt. Da aber in diesem Falle gleichzeitig $D_2 = 0$ ist, so kann man wieder das auf den ganzen, starren Arm ausgeübte Drehungsmoment als die Summe von D_1 und D_2 auffassen.

Die auf die einzelnen Abschnitte oder auf das ganze als starr aufgefasste Gliedersystem einwirkenden Kräftepaare ertheilen nun den Gliedern bestimmte Winkelbeschleunigungen oder Drehungsbeschleunigungen. Befindet sich vor der Contraction der Muskeln das Gliedersystem in Ruhe, so werden bei der Contraction die Glieder in Drehung versetzt. Ist dagegen vor der Contraction das System schon in Bewegung, etwa in Folge der Schwere oder anderer äusserer Kräfte, so besteht der Effect der Muskelcontraction darin, dass die

Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen die Drehungen der Glieder vor sich gehen, verändert werden. Wird die Drehungsgeschwindigkeit eines Gliedes vergrössert, so redet man von Winkelbeschleunigung oder Drehungsbeschleunigung, wird dieselbe verkleinert, von Winkelverzögerung oder Drehungsverzögerung. Letztere kann man auch negative Winkelbeschleunigung oder negative Drehungsbeschleunigung nennen, da sie bei der Rechnung sich von der Winkelbeschleunigung nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

Die Winkelbeschleunigungen, welche den Gliedern durch die Kräftepaare ertheilt werden, hängen nun nicht allein von den Momenten der Kräftepaare ab, sondern sie werden in erster Linie bestimmt durch die Massen und Trägheitsmomente der Glieder; sie werden ausserdem bei Systemen von durch Gelenke verbundenen Gliedern beeinflusst durch die Winkelgeschwindigkeiten, welche die einzelnen Glieder im Moment der Einwirkung des Muskels besitzen.

Greift eine Anzahl Kräfte an einem einzigen starren Körper an, welcher um eine feste Axe drehbar ist, und liegen alle diese Kräfte in einer zur Axe senkrechten Ebene, so erhält man die Kräftepaare, mit welchen dieselben den Körper um die Axe zu drehen streben, indem man im Schnittpunkte der Kräfteebene mit der Drehungsaxe entsprechend jeder Kraft eine entgegengesetzt gleiche angebracht denkt. Die durch diese Kräftepaare hervorgerufene Winkelbeschleunigung φ'' ist dann direct proportional der Summe D der Drehungsmomente aller Kräftepaare, dagegen umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Umdrehungsaxe. Bedeutet m die Grösse der Masse und λ die Grösse des betreffenden Trägheitsradius, so ist also

$$\varphi'' = \frac{D}{m\lambda^2}.$$

Es ist infolge dessen D gleich dem Product $m\lambda^2 \cdot \varphi''$ aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung.

Bei dem von uns in Betracht gezogenen System von Körpern wird eine so einfache Beziehung zwischen resultirendem Drehungsmoment, Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung nicht stattfinden können; denn ein auf den Oberarm einwirkendes Kräftepaar hat ja nicht allein den Oberarm um eine Schultergelenkaxe zu drehen, sondern es hat bei dieser Drehung die ganze Masse von Unterarm plus Hand

mit in Bewegung zu setzen. Es ist dabei von vorn herein wahrscheinlich, dass die dem Oberarm durch das Drehungsmoment ertheilte Winkelbeschleunigung nicht allein von der Masse von Unterarm plus Hand, sondern auch von der Lage des Schwerpunktes dieses letzteren Systems abhängig sein wird, und dass auch eine gleichzeitig vorhandene Winkelbeschleunigung, ja selbst eine Winkelgeschwindigkeit des Systems Unterarm plus Hand — die letztere infolge der dadurch hervorgerufenen Centrifugalkraft — modificirend auf die Drehung des Oberarms einwirken wird. Schliesslich wird auch die Beugestellung im Ellbogengelenk Einfluss auf die Drehung haben. Auf der anderen Seite wird ein am System Unterarm plus Hand angreifendes Kräftepaar zwar zunächst nur dieses System in Drehung versetzen wollen. Diese Drehung kann aber nicht genau so stattfinden, als ob die Axe des Ellbogengelenks fest wäre. Denn im Allgemeinen wird bei der Drehung eines Körpers um eine feste Axe ein Druck auf die letztere ausgeübt, welchem durch Widerstandskräfte an den Befestigungsstellen der Axe das Gleichgewicht gehalten wird. Ist nun die Axe selbst beweglich, wie die Ellbogenaxe in unserem Gliedersystem, so wird dieselbe dem Drucke nachgeben, d. h. es wird im Allgemeinen mit der Drehung des Unterarms im Ellbogengelenk eine Drehung des Oberarms um die Schultergelenkaxe Hand in Hand gehen, für deren Grösse voraussichtlich auch die Beugestellung im Ellbogengelenk von Einfluss ist. Diese Drehung wird indirect ebenfalls durch das am Unterarm angreifende Kräftepaar veranlasst. Es muss in Folge dessen das Drehungsmoment dieses Kräftepaares auch in gewisser Beziehung zu der Winkelbeschleunigung und Winkelgeschwindigkeit des Oberarms stehen.

Für eine exacte Ableitung der Beziehungen, welche zwischen den Momenten der wirksamen Kräftepaare einerseits, und den Winkelbeschleunigungen, Winkelgeschwindigkeiten, Massen, Trägheitsmomenten, Dimensionen der einzelnen Glieder und den Gelenkstellungen andererseits bestehen, muss man seine Zuflucht zu den von Lagrange aufgestellten allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung oder zu einem der umfassenden Principe der Mechanik, wie z. B. dem Hamilton'schen Princip oder dem Euler'schen Princip der kleinsten Wirkung, nehmen. Zum Verständniss der dazu nöthigen Rechnungen ist aber die Kenntniss der Methoden der Differential- und Inte ral-

rechnung und der Behandlung von Differentialgleichungen unerlässlich. Da diese Kenntniss nicht von Jedem vorausgesetzt werden kann, welcher sich über die Art und die Ursachen der Gliederbewegungen des lebenden Menschen und Thieres Klarheit verschaffen muss, so werde ich zwar zunächst die in Frage stehenden Beziehungen mit Hülfe der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen ableiten, dann aber versuchen, dieselben Resultate auf elementarem Wege, durch einfache Ueberlegungen, abzuleiten. Man kann den vorher einzuschlagenden exacten Weg schon aus dem Grunde nicht vermeiden, weil man auf diese einfachen Ueberlegungen zum Theil erst durch die Endresultate der verwickelten Rechnungen hingewiesen wird. Wenn daher auch der elementare Weg der Darstellung im Interesse des Verständnisses der Resultate als der zweckmässigere erscheint, so wird man zur Ableitung neuer Resultate doch stets den exacten und sicheren Weg der mathematischen Analyse zu wählen haben. Ich bitte daher Diejenigen, welche der höheren Mathematik unkundig sind, die folgenden Seiten zu überschlagen und verweise dieselben auf die Auseinandersetzungen, welche auf Seite 150 beginnen.

Die Bewegungsgleichungen von Lagrange in der für die gegenwärtige Anwendung zweckmässigsten Form schliessen sich eng dem Ausdrucke für die gesammte lebendige Kraft T der Bewegung des Gliedersystems an. Wir hatten die lebendige Kraft in zwei verschiedenen Formen aufgestellt. Dementsprechend erhält man zwei verschiedene Paare von Bewegungsgleichungen. Bei der ersten Form hatten wir als unabhängige Veränderliche die beiden Winkel φ_1, φ_2 benutzt, welche die Längsaxen von Oberarm und Unterarm mit einer zum Rumpfe festen Geraden $\mathfrak{S}A$ (vergl. Fig. 6) bilden. Es traten infolge dessen die Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2' auf, welche nichts anderes darstellen als die Differentialquotienten der beiden Winkel φ_1 und φ_2 nach der Zeit t, so dass also

$$\varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{und} \quad \varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen lauten nun in diesem Falle:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_{\varphi_2}\,.$$

Dabei bedeuten Q_{φ_1} bezüglich Q_{φ_2}, wie ich in meiner Habilitationsschrift ausführlich nachgewiesen habe, die Summen der Momente aller Kräftepaare, welche in Folge von äusseren und inneren Kräften auf den Oberarm bezüglich das System Unterarm plus Hand drehend einwirken.

Aus

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2'$$

folgt nun:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'} = m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} = m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'' + m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2' - m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1' \varphi_2'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'} = m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1'$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right)}{dt} = m_0 \lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1'' - m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2' \varphi_1' + m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1'^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = - m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2' \varphi_1'\,.$$

Handelt es sich zunächst nur um die alleinige Wirkung eines Muskels, unter Ausschluss aller anderen inneren oder äusseren Kräfte, wie z. B. der Schwere, so ist Q_{φ_1} gleich dem Drehungsmoment D_1, welches dieser Muskel auf den Oberarm, und Q_{φ_2} gleich dem Drehungsmoment D_2, welches derselbe auf das starre System Unterarm plus Hand ausübt. Man hat infolge dessen die beiden zusammengehörenden Bewegungsgleichungen

$$m_0\lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'' - m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'^2 = D_1$$

$$m_0\lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_1'^2 = D_2.$$

Dies sind die gesuchten Beziehungen, welche zwischen den Drehungsmomenten des Muskels einerseits und den Winkelbeschleunigungen, Winkelgeschwindigkeiten, den Massen, Trägheitsradien, den Längen und Hauptstrecken der Glieder und dem Beugungswinkel im Ellbogengelenk andererseits bestehen.

Bevor wir auf die Deutung dieser Beziehungen näher eingehen, wollen wir noch einige Betrachtungen an die Werthe der Differentialquotienten der lebendigen Kraft knüpfen.

Zunächst ist ersichtlich, dass in unserem Falle $\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}$ ist, so dass also zwischen diesen beiden partiellen Differentialquotienten die einfache Beziehung $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0$ besteht.

Addirt man die beiden Bewegungsgleichungen in der oben angegebenen Form, so hebt sich diese Summe fort und man erhält:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} = Q_{\varphi_1} + Q_{\varphi_2}\,.$$

Durch beiderseitige Multiplication mit dt und Integration ergiebt sich hieraus allgemein

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'} + \frac{\partial T}{\partial \varphi_2'} = \int (Q_{\varphi_1} + Q_{\varphi_2})\, dt + C\,,$$

wo C die Integrationsconstante bedeutet.

Im Falle eines einzigen Muskels mit den beiden Drehungsmomenten D_1 und D_2 hat man dann nach Einsetzen der Ausdrücke für $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}$ und $\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}$

$$m_0[\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \varphi_1' + m_0[\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \varphi_2'$$
$$= \int (D_1 + D_2)\, dt + C\,.$$

Erstreckt sich der Muskel nur zwischen Oberarm und dem als starr aufgefassten System Unterarm plus Hand, so ist, wie wir sahen,

$$D_1 + D_2 = 0\,.$$

Zieht man dabei vorläufig nur den Fall in Betracht, dass die beiden Abschnitte des Arms sich vor der Contraction des Muskels in Ruhe befinden, so ist für $\varphi_1' = 0$ auch $\varphi_2' = 0$, und infolge dessen besitzt in diesem Falle auch die Constante C den Werth Null. Man hat daher stets, wenn sich allein ein zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm plus Hand hinziehender Muskel von der Ruhe aus contrahirt und jede andere Einwirkung, wie z. B. die der Schwere, auf das Gliedersystem ausgeschlossen ist, zwischen den beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', φ_2', da sich der gemeinsame Factor m_0 heraushebt, die Beziehung

$$[\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \varphi_1' + [\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \varphi_2' = 0$$

oder

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} = -\frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Bei dem zweiten von uns aufgestellten Ausdruck für die gesammte lebendige Kraft des Gliedersystems waren als unabhängige Veränderliche der Drehungswinkel φ_1 im Schultergelenk (wie beim ersten Ausdruck) und der Beugungswinkel ψ im Ellbogengelenk benutzt. Infolge dessen traten in demselben die beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_1' der zum Rumpfe relativen Drehung des Oberarms im Schultergelenk und ψ' der zum Oberarm relativen Drehung des Unterarms im Ellbogengelenk auf; dieselben sind wieder die Differentialquotienten der beiden Winkel nach der Zeit, also

$$\varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{und} \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt}.$$

Die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen lauten daher in diesem zweiten Falle:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = [Q_{\varphi_1}]$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_{\psi}.$$

Hierbei besitzt die Grösse $[Q_{\varphi_1}]$ eine andere Bedeutung wie Q_{φ_1} in dem ersten Paare von Bewegungsgleichungen; dieselbe ist daher zum Unterschiede in Klammer eingeschlossen worden. Es ist

nämlich jetzt $[Q_{\varphi_1}]$ die Summe der Momente aller Kräftepaare, welche nach Feststellung des Ellbogengelenks drehend auf den ganzen, dabei als starre Masse aufzufassenden, Arm einwirken. Q_ψ ist dagegen die Summe der Momente aller Kräftepaare, welche das starre System Unterarm plus Hand im Ellbogengelenk relativ zum Oberarm zu drehen streben.

Aus

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 \lambda_2^2 \cdot \psi'^2 + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1' \psi'$$

folgt nun

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'} = m_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1' + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \psi'$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} = m_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'' + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \psi'' - \\ - 2 m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \varphi_1' \psi' - m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \psi'^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = m_0 \lambda_2^2 \cdot \psi' + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right)}{dt} = m_0 \lambda_2^2 \cdot \psi'' + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'' - m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \psi' \cdot \varphi_1'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = - m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \psi' \varphi_1' - m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \varphi_1'^2 .$$

Wirkt nur ein einziger Muskel auf das System, im Uebrigen keine andere äussere oder innere Kraft, so ist nach der eingeführten Bezeichnungsweise und nach früheren Auseinandersetzungen $[Q_{\varphi_1}] = D_1 + D_2$ und $Q_\psi = D_2$, und man hat die beiden zusammengehörenden Bewegungsgleichungen

$$m_0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'' + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \psi'' - 2 m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \varphi_1' \psi' \\ - m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \psi'^2 = D_1 + D_2$$

$$m_0 \lambda_2^2 \cdot \psi'' + m_0 (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \sin\psi \cdot \varphi_1'^2 = D_2 .$$

Diese beiden Gleichungen können natürlich nichts anderes aussagen, als das zuerst aufgestellte Paar von Bewegungsgleichungen auf Seite 145; sie werden sich von jenen nur in der Form unterscheiden, da im letzteren Falle an Stelle der zweiten unabhängigen Variabelen φ_2 des ersten Paares der Winkel ψ getreten ist.

Es ist daher im Princip gleichgültig, ob man sich für die Ableitung weiterer Resultate des ersten oder letzten Paares von Bewegungsgleichungen bedient. Da es jedoch viel anschaulicher ist und auch dem anatomischen Sprachgebrauche mehr entspricht, wenn man eine Bewegung des Arms als Drehung des Oberarms gegen den Rumpf im Schultergelenk und gleichzeitige Drehung des Unterarms gegen den Oberarm im Ellbogengelenk auffasst, als wenn man die Drehungen beider Armabschnitte relativ zum Rumpfe betrachtet, so werden wir im Folgenden hauptsächlich das letztere Paar von Bewegungsgleichungen benutzen, trotzdem dasselbe auf den ersten Blick weniger einfach zu sein scheint als das erstere.

Während früher $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0$ war, hat man jetzt nicht eine solche Beziehung zwischen $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}$ und $\frac{\partial T}{\partial \psi}$. Die frühere einfache Beziehung wird dagegen jetzt ersetzt durch $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$. Infolge dieser Thatsache hat man nämlich bei Anwendung des zweiten Ausdrucks der lebendigen Kraft

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)}{dt} = [Q_{\varphi_1}]$$

und folglich

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'} = \int [Q_{\varphi_1}] + C\,,$$

unter C wieder die Integrationsconstante verstanden.

Im Falle eines einzigen Muskels hat man dann im Hinblick auf den jetzt veränderten Werth von $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}$ die der früheren genau entsprechende Beziehung:

$$m_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1' + m_0(\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \psi' =$$
$$= \int (D_1 + D_2)\,dt + C\,.$$

Handelt es sich wiederum um einen nur zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm plus Hand sich erstreckenden Muskel, so ist $D_1 + D_2 = 0$. Wird ferner wieder vorausgesetzt, dass der Arm sich vor der Contraction des Muskels in Ruhe befindet, so ist

$C = 0$, und man hat zwischen den Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und ψ' der Drehungen im Schultergelenk und im Ellbogengelenk die Beziehung:

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1' + (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \psi' = 0$$

oder

$$\frac{\varphi_1'}{\psi'} = - \frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi}.$$

Dieselbe ist keine andere, wie die schon früher gefundene; sie unterscheidet sich von jener nur durch die unabhängigen Veränderlichen. Setzt man in jener (auf Seite 146) für φ_2 und φ_2' die Summen $\varphi_1 + \psi$ und $\varphi_1' + \psi'$ ein, so erhält man diese.

Die Relation zwischen den beiden Winkelgeschwindigkeiten φ_1' und ψ' stellt nun zugleich eine Differentialgleichung dar, aus welcher sich durch Integration der Ausdruck für die Abhängigkeit zwischen dem Drehungswinkel φ_1 im Schultergelenk und dem Beugungswinkel ψ im Ellbogengelenk finden lässt. Beachtet man nämlich, dass

$$\varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{und} \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt},$$

und setzt man an Stelle von $\frac{d\varphi_1}{dt}$ das ihm gleiche Product $\frac{d\varphi_1}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt}$ ein, so folgt nach Division mit dem jetzt beiden Gliedern gemeinsamen Factor $\frac{d\psi}{dt}$ die Differentialgleichung

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \frac{d\varphi_1}{d\psi} + (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) = 0\,.$$

In derselben kommt die Zeit nicht mehr vor, es tritt vielmehr ψ als unabhängige Veränderliche auf, und es ist infolge dessen der Winkel φ_1 als Function von ψ aufgefasst.

Da sich in dieser Differentialgleichung die Variabelen separiren lassen, so lässt sie sich unmittelbar integriren. Man hat zunächst

$$d\varphi_1 = - \frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi} \cdot d\psi$$

und erhält hieraus

$$\varphi_1 = -\int \frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi} \cdot d\psi + \alpha,$$

wo α die Integrationsconstante bedeutet.

Die Ausführung der Integration ergiebt die zwischen φ_1 und ψ stattfindende Relation:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 4 l_1^2 c_2^2}} \operatorname{arctang} \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 l_1 c_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2}} \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right\} - \frac{\psi}{2} + \alpha .$$

Da $\varphi_1 = \alpha$ wird, wenn man $\psi = 0$ setzt, so stellt α den Winkel dar, welchen die Längsaxe des Oberarms mit der zum Rumpfe festen Geraden $\mathfrak{S}A$ (Fig. 6) bildet, wenn der Arm im Ellbogengelenk vollständig gestreckt ist. —

Bevor ich weiter auf die Bedeutung aller dieser Relationen für die Wirkung der Muskeln eingehe, will ich nunmehr versuchen, die auf exactem Wege gewonnenen Bewegungsgleichungen noch einmal auf elementare Weise, durch einfache Ueberlegungen, abzuleiten.

Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst nochmals die Drehung eines einzigen starren Körpers um eine feste Axe in Betracht ziehen.

Ein Körper von der Masse m sei um eine feste Axe drehbar, welche in Figur 10 in $\mathfrak{A}$ senkrecht zu der Ebene der Zeichnung zu denken ist, und welche eine Hauptträgheitsaxe des Körpers für den Punkt $\mathfrak{A}$ darstellt. Sein Schwerpunkt S liege in der durch $\mathfrak{A}$ senkrecht zur Axe gelegten Ebene (Ebene der Zeichnung) und besitze von der Axe die Entfernung r. Auf diesen Körper, welcher sich zunächst in Ruhe befinden soll, wirke eine im Punkte $\mathfrak{P}$ angreifende und in der Ebene der Zeichnung liegende Kraft K, welche die Resultante beliebig vieler in dieser Ebene gelegener Kräfte sein kann. Dieselbe wird, wenn

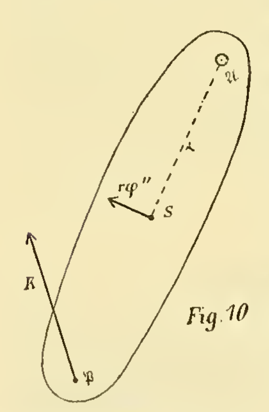


Fig. 10

ihre Richtung nicht gerade die Axe schneidet, den Körper in Drehung versetzen. Die Winkelbeschleunigung dieser Drehung sei φ''. Würde der Körper vollständig frei sein, so würde diese Drehung um den Schwerpunkt S stattfinden, und ausserdem würde dem Körper eine Parallelverschiebung durch die Kraft K ertheilt werden, bei welcher der Schwerpunkt seinen Ort verändert. Die Bewegung des Schwerpunktes wäre genau dieselbe, welche er annehmen müsste, wenn in ihm die Masse des ganzen Körpers vereinigt wäre und zugleich die Kraft K in ihm selbst angriffe. Der Schwerpunkt würde sich also

in der Richtung dieser Kraft fortbewegen. Da die Bewegung des Körpers nicht frei ist, sondern der Schwerpunkt in Folge der festen Drehungsaxe auf den Kreis um $\mathfrak{A}$ mit dem Radius r gezwungen ist, so kann der Schwerpunkt diesem Zuge der Kraft nicht folgen. Es wird sich dagegen das Bestreben des Körpers, die Bewegung anzunehmen, welche ihm bei vollständig freier Beweglichkeit durch die Kraft K ertheilt würde, als Druck auf die Axe geltend machen. Dieser Druck ruft an den Befestigungstellen der Axe Widerstandskräfte hervor, welche genau so gross sein müssen, dass ihre Resultante dem Druck auf die Axe das Gleichgewicht hält. Es muss also die Resultante R der Widerstandskräfte entgegengesetzt gleich dem Drucke sein, welchen die Axe erleidet. Diese Widerstandskräfte wirken auf den Körper wie äussere Kräfte.

Der Schwerpunkt des Körpers erfährt nun bei der durch die Kraft dem Körper mitgetheilten Winkelbeschleunigung φ'' die lineare Beschleunigung $r\varphi''$. Diese kann dem Schwerpunkte nur durch eine auf den Körper wirkende äussere Kraft ertheilt worden sein, und zwar ist zur Hervorbringung dieser Beschleunigung eine Kraft von der Grösse $mr\varphi''$ und von der zu $\mathfrak{A}S$ senkrechten Richtung nöthig. Die sämmtlichen äusseren Kräfte müssen daher, nach dem Schwerpunkte verlegt, diese Kraft als Resultante besitzen. Als äussere Kräfte wirken aber in dem betrachteten Falle nur die Kraft K und die Resultante R der Reactionskräfte der Axe. Es muss daher die letztere so beschaffen sein, dass sie sich mit der Kraft K, wenn beide nach dem Schwerpunkte verlegt werden, zu der Resultante $mr\varphi''$ zusammensetzt. Die Resultante R der Reactionskräfte stellt daher die zweite Seite eines Parallelogramms dar, dessen eine Seite K und dessen eine Diagonale $mr\varphi''$ ist, wie Figur 11 veranschaulicht. Es ist zweckmässig, an Stelle der auf diese Weise zu berechnenden Reactionsresultante R zwei Componenten zu setzen, welche zusammen derselben in Bezug auf die Wirkung äquivalent sind. Bringt man nämlich im Angriffspunkte der drei Kräfte in Figur 11 eine der Kraft K entgegengesetzt gleiche Kraft $-K$ an, was in Figur 12 besonders

Fig. 11

Fig. 12

ausgeführt ist, um die Einfachheit der Figur 11 nicht zu zerstören, so erkennt man ohne Weiteres, dass $mr\varphi''$ und $-K$ die Seiten eines Parallelogramms bilden, deren eine Diagonale R ist. Es lässt sich daher die Reactionsresultante R, welche ihren Angriffspunkt in $\mathfrak{A}$ (Figur 10) besitzt, in die beiden Componenten $mr\varphi''$ und $-K$ zerlegen. Da die Reaktionsresultante R nun genau entgegengesetzt gleich dem Drucke auf die Gelenkaxe ist, so erkennt man hieraus, dass dieser Druck die Resultante zweier Componenten darstellt: die eine Componente ist die nach $\mathfrak{A}$ verlegte Kraft K, und die andere ist eine Kraft, welche entgegengesetzt gleich der Kraft $mr\varphi''$ ist, die dem mit der Gesammtmasse m des Körpers versehenen Schwerpunkte die lineare Beschleunigung $r\varphi''$ ertheilt; die Grösse der letzteren ist $-mr\varphi''$. Die eine Componente ist nur von der Grösse und Richtung der äusseren Kraft K, die andere nur von der Winkelbeschleunigung des Körpers, der Masse desselben und der Lage seines Schwerpunktes abhängig.

Wir hatten bisher angenommen, dass auf den Körper eine äussere Kraft K wirke, welche die Resultante beliebig vieler in der Ebene der Zeichnung gelegener Kräfte darstellen sollte. Wir wollen nun noch den Fall in's Auge fassen, dass das ebene Kräftesystem, welches auf den Körper einwirkt, keine Resultante besitzt, sondern einem Kräftepaar $(K, -K)$ äquivalent ist. Dann wird jede der beiden Kräfte des Paares für sich Veranlassung zu einer Druckwirkung auf den Punkt $\mathfrak{A}$ geben, welche gleich der Wirkung einer ihr gleichen und gleichgerichteten im Punkte $\mathfrak{A}$ angreifenden Kraft ist. Da die beiden Kräfte eines Paares entgegengesetzt gleich sind, so werden sich diese beiden Druckwirkungen gegenseitig tilgen. Es bleibt in Folge dessen in diesem Falle allein der Druck von der Grösse $-mr\varphi''$ übrig, wenn φ'' die Winkelbeschleunigung ist, welche der Körper durch das Kräftepaar erfahren hat.

Die Axe ist nun unter allen Umständen diesen Druckkräften ausgesetzt, gleichgültig ob sie fixirt oder ob sie frei ist. Ist dieselbe fixirt, so tritt eben deshalb keine Bewegung der Axe ein, weil die auftretenden Reactionskräfte dem Drucke das Gleichgewicht halten. Befindet sich dagegen die Axe an einem zweiten Körper, welcher nicht festgestellt ist, so wirkt dieser Axendruck auf diesen zweiten Körper genau so wie eine in $\mathfrak{A}$ angreifende äussere Kraft von der-

selben Stärke bewegend ein. Diesen letzteren Fall finden wir aber in dem von uns in Betracht gezogenen Gliedersysteme vor. Hier ruft jede am System Unterarm plus Hand angreifende Kraft einen ihr gleichen Druck im Punkte 𝔈 der Ellbogenaxe hervor, und die dem Unterarm mitgetheilte Winkelbeschleunigung φ_2'' giebt Veranlassung zu einer Druckcomponente im Punkte 𝔈 von der Grösse $m_2 r_2 \varphi_2''$, welche auf $𝔈 S_2$ senkrecht steht und der zu 𝔈 relativen linearen Beschleunigung, die der Schwerpunkt S_2 infolge der Winkelbeschleunigung φ_2'' erfährt, entgegengesetzt gerichtet ist.

Man hat nun weiterhin in Rücksicht zu ziehen, dass der Oberarm bei seiner Drehung um eine Schultergelenkaxe die ganze träge Masse des Unterarms und der Hand mit in Bewegung zu setzen hat. Da dem Einfluss, welchen eine eigne Drehungsbeschleunigung des Systems Unterarm plus Hand auf die Drehung des Oberarms ausübt, schon in der einen Componente des Drucks auf die Ellbogenaxe Rechnung getragen ist, so hat man nur noch zu berücksichtigen, in welcher Weise die am Oberarm hängende Masse des Systems Unterarm plus Hand die Drehungen des Oberarms beeinflusst, wenn dieselbe ohne Drehung den Bewegungen der Ellbogenaxe folgt, oder, mit anderen Worten, wenn dieselbe nur Parallelverschiebung ausführt. Die lineare Beschleunigung, welche dem System Unterarm plus Hand durch den Oberarm in Folge der Gelenkverbindung beider Glieder aufgezwungen wird, ist gleich der linearen Beschleunigung, welche die Ellbogenaxe infolge der Drehung des Oberarms relativ zum Rumpfe erfährt. Beträgt die Winkelbeschleunigung der Drehung des Oberarms φ_1'', so ist die lineare Beschleunigung von 𝔈 relativ zum Rumpfe gleich $l_1 \varphi_1''$. Um dem System Unterarm plus Hand die lineare Beschleunigung $l_1 \varphi_1''$ zu ertheilen, ist aber eine Kraft von der Grösse $m_2 l_1 \varphi_1''$ erforderlich. Der Oberarm muss daher mit seinem Ellbogenende auf das System Unterarm plus Hand einen Druck von dieser Stärke senkrecht zur Längsaxe 𝔖𝔈 des Oberarms ausüben. Nach dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung muss aber dann umgekehrt das System Unterarm plus Hand in entgegengesetzter Richtung mit derselben Stärke $m_2 l_1 \varphi_1''$ auf den Punkt 𝔈 des Oberarms drücken. Es resultirt hieraus eine neue Druckcomponente auf den Punkt 𝔈 des Oberarms.

Bisher haben wir angenommen, dass der um eine feste Axe

drehbare Körper (Figur 10) aus der Ruhe bewegt werde. Besitzt derselbe nun in dem Augenblicke, in welchem die Kräfte zu wirken beginnen, schon eine Bewegung, etwa eine Drehung um die Axe von der Winkelgeschwindigkeit φ', so kommt noch eine weitere Druckcomponente hinzu, welche ihren Grund in den Centrifugalkräften hat, mit denen die einzelnen Massentheilchen bei der Drehung sich von der Axe zu entfernen streben. Diese Centrifugalkräfte wirken zwar in allen zur Axe senkrechten Richtungen auf die Axe ein, sie zerstören sich aber trotzdem nur unter ganz besonderen Verhältnissen, nämlich nur dann, wenn die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt hindurchgeht, und wenn dieselbe gleichzeitig eine Hauptträgheitsaxe des Körpers darstellt. Findet zwar das letztere statt, was wir für die Axe durch $\mathfrak{A}$ annehmen wollten, liegt dagegen der Schwerpunkt ausserhalb der Axe im Abstande r, so setzen sich die sämmtlichen Centrifugalkräfte zu einer Resultante von der Grösse $mr\varphi'^2$ zusammen. Ist die Umdrehungsaxe eine der zum Punkte $\mathfrak{A}$ gehörenden Hauptträgheitsaxen und liegt S in der durch $\mathfrak{A}$ zur Axe senkrechten Ebene, was wir oben vorausgesetzt haben, so besitzt die resultirende Centrifugalkraft die Richtung $\mathfrak{A}S$. Es kommt daher zu den beiden angeführten Componenten des Druckes auf die Axe noch die in der Richtung $\mathfrak{A}S$ wirkende Druckcomponente $mr\varphi'^2$ hinzu. Bei fester Axe wird dieselbe eine ihr entgegengesetzt gleiche Reactionscomponente hervorrufen. In dem betrachteten Gliedersysteme wird die aus der Winkelgeschwindigkeit φ_2' des Systems Unterarm plus Hand herrührende, im Punkte $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe angreifende Druckcomponeute $m_2r_2\varphi_2'^2$ im Allgemeinen bewegend auf den im Schultergelenk drehbaren Oberarm einwirken.

Nimmt man zu den Drehungsmomenten der direct am Oberarm angreifenden Kräfte die Drehungsmomente der im Punkte $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe angreifenden Druckcomponenten hinzu, welche einerseits von den am System Unterarm plus Hand angreifenden Kräften, andererseits von der eignen zum Rumpfe relativen Bewegung dieses Systems herrühren, so muss zwischen der Summe dieser Drehungsmomente, dem Trägheitsmoment des Oberarms — beide in Bezug auf die Drehungsaxe im Schultergelenk genommen — und der Winkelbeschleunigung des Oberarms wieder die schon früher (Seite 141) angeführte einfache Beziehung bestehen: Es muss das Product aus

Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung gleich der Summe sämmtlicher auf den Oberarm einwirkenden Drehungsmomente sein.

Das Trägheitsmoment des Oberarms in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Schulteraxe ist $m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2)$, die Winkelbeschleunigung des Oberarms φ_1''.

Von den Drehungsmomenten sollen zunächst die durch die Muskelkräfte hervorgerufenen in Betracht gezogen sein. Wirkt ein einziger zwischen Oberarm und dem als starr aufgefassten System Unterarm plus Hand sich erstreckender Muskel, so setzt sich das Drehungsmoment der am Oberarm direct angreifenden Muskelkraft mit dem Drehungsmoment der durch die entgegengesetzt gleiche, am System Unterarm plus Hand angreifenden Muskelkraft hervorgerufenen Druckcomponente in 𝔈 zu dem Moment des Kräftepaares zusammen, welches bei den früheren Auseinandersetzungen mit D_1 bezeichnet worden ist. Setzt der Muskel am System Unterarm plus Hand an, während sein Ursprung sich am Rumpfe befindet, so ist das Moment D_1 allein gleich dem Drehungsmoment der in 𝔈 angreifenden Druckkraft in Bezug auf den Schultergelenkmittelpunkt 𝔖. Genau genommen hat man es, wie schon mehrfach betont worden ist, auch hier mit dem Moment eines Kräftepaares zu thun, bei welchem die eine Kraft in 𝔈, die andere im Schultergelenkmittelpunkt 𝔖 angreift. Setzt der vom Rumpfe herziehende Muskel am Oberarm selbst an, so ist das Moment D_1 gleich dem auf 𝔖 bezogenen Drehungsmoment der am Oberarm angreifenden Muskelkraft, bezüglich gleich dem Momente eines Paares von Kräften, welche im Ansatzpunkte des Muskels und im Schultergelenkmittelpunkt angreifen. Wirken mehrere Muskeln, welche unter diese drei Arten gehören, gleichzeitig auf den Oberarm drehend ein, so ist unter D_1 die Summe der von ihnen verursachten Drehungsmomente zu verstehen.

Das Drehungsmoment der in 𝔈 angreifenden Druckcomponente $-m_2 r_2 \varphi_2''$ ist $-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot l_1$. Dies geht daraus hervor, dass diese Druckcomponente senkrecht zu der Längsachse 𝔈 S_2 𝔋 des Unterarms (Fig. 6) gerichtet ist, dass sie also mit der zur Längsaxe 𝔖𝔈 des Oberarms senkrechten Richtung denselben Winkel bildet, wie die Längsaxe des Unterarms mit der Verlängerung der Oberarmlängsaxe. Dieser Winkel ist $\varphi_2 - \varphi_1$. Daher ist die drehende Componente der Druckkraft $-m_2 r_2 \varphi_2''$ gleich $-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Da ferner ihr Hebelarm l_1 ist, so ergiebt sich der angeführte Werth für ihr Drehungsmoment.

Die Druckcomponente $m_2 l_1 \varphi_1''$ besitzt direct die zu $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ senkrechte Richtung und sucht den Winkel φ_1 zu verkleinern. Ihr Drehungsmoment beträgt daher $-m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot l_1$.

Die Druckcomponente $m_2 r_2 \varphi_2'^2$ ist von $\mathfrak{E}$ aus nach S_2 hin gerichtet. Ihre Richtung bildet daher mit der Verlängerung der Oberarmlängsaxe den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$. Daraus ergiebt sich, dass sie mit einer zur Oberarmlängsaxe senkrecht gerichteten Kraft von der Grösse $m_2 r_2 \varphi_2'^2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ drehend auf den Oberarm einwirkt, und dass infolge dessen ihr Drehungsmoment in Bezug auf die Schulteraxe $m_2 r_2 \varphi_2'^2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot l_1$ beträgt.

Dies vorausgeschickt ergiebt sich als Bewegungsgleichung:

$$m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) \cdot \varphi_1'' = D_1 - m_2 r_2 \varphi_2'' \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot l_1 - m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot l_1 \\ + m_2 r_2 \varphi_2'^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot l_1 .$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese auf elementarem Wege abgeleitete Bewegungsgleichung identisch ist mit der ersten der beiden aus den Lagrange'schen Differentialgleichungen gewonnenen Bewegungsgleichungen, welche sich auf Seite 145 niedergelegt finden. Zu dem Zwecke hat man nur zunächst die Glieder der rechten Seite, mit Ausnahme von D_1 auf die linke Seite zu bringen und die Glieder mit dem Factor φ_1'' zusammenzufassen. Dann erhält man:

$$[m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2] \cdot \varphi_1'' + m_2 l_1 r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'' \\ - m_2 l_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'^2 = D_1 .$$

Nun ist $m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2$ das Trägheitsmoment des reducirten Oberarmsystems in Bezug auf die Schulteraxe. Bezeichnet man, wie früher, den zugehörigen Trägheitsradius mit λ_1, so kann man also dieses Trägheitsmoment kurz in der Form $m_0 \lambda_1^2$ schreiben. Ferner ist $m_2 r_2 = m_0 c_2$, da c_2 den Abstand des Schwerpunktes S_2 des reducirten Unterarmsystems (Hauptpunkt von Unterarm plus Hand) von $\mathfrak{E}$ bedeutet und die Masse m_1 des Oberarms bei diesem reducirten System in den Punkt $\mathfrak{E}$ verlegt zu denken ist. Setzt man dies ein, so erhält man in der That:

$$m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'' - m_0 l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \varphi_2'^2 = D_1 .$$

Zum Zwecke der elementaren Ableitung der zweiten Bewegungsgleichung wollen wir zunächst wieder den einfachen Fall der Dreh-

ung eines Körpers um eine feste Axe (Figur 10 auf Seite 150), in Betracht ziehen, wobei zur Vereinfachung der Aufgabe dieselben Voraussetzungen wie früher zutreffen sollen, so z. B. die, dass die Axe eine Hauptträgheitsaxe des Punktes 𝔄 darstellt, dass der Schwerpunkt S in der zur Axe senkrechten Ebene durch 𝔄 liegt, u. s. w. Wir fanden, dass bei der Einwirkung einer im Punkte 𝔓 angreifenden und in der zur Axe senkrechten Schwerpunktsebene liegenden Kraft K, welche dem Körper eine Winkelbeschleunigung von der Grösse φ'' ertheilt, im Punkte 𝔄 der Axe eine Reactionskraft R auftritt, welche sich aus den beiden Componenten $-K$ und $mr\varphi''$ (Figur 12 auf Seite 151) zusammensetzt. Fasst man die beiden Reactionscomponenten als äussere Kräfte auf, so kann man den Körper als vollständig frei beweglich und unter der Wirkung der drei Kräfte K, $-K$, $mr\varphi''$ stehend ansehen, von denen die erstere in 𝔓 und die beiden letzteren in 𝔄 angreifen. Diese drei Kräfte wirken dann auf den Schwerpunkt S so, als ob sie direct in ihm angriffen und die im Schwerpunkte concentrirte Gesammtmasse m fortzubewegen hätten. Da K und $-K$ sich gegenseitig vernichten, so wirkt also nur noch die Kraft von der Grösse $mr\varphi''$ auf denselben und ertheilt ihm, wie man aus dem Werthe der Kraft sofort erkennt, die lineare Beschleunigung $r\varphi''$. Andererseits verursachen die drei äusseren Kräfte eine Drehung des Körpers um den Schwerpunkt. Die Drehungsmomente der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte K und $-K$ setzen sich zu dem Moment des von ihnen gebildeten Kräftepaares zusammen — dasselbe sei D —, und das Drehungsmoment der Kraft $mr\varphi''$ in Bezug auf den Schwerpunkt ist $mr\varphi'' \cdot r$, weil dieselbe an dem Hebelarm r senkrecht zu S𝔄 wirkt. Da diese Kraft die entgegengesetzte Drehung wie das Kräftepaar $(K, -K)$ hervorbringen will, so ist ihr Drehungsmoment negativ in Rechnung zu bringen, wenn man D positiv rechnet. Ist $\varkappa$ der Trägheitsradius des Körpers in Bezug auf die zur Umdrehungsaxe parallele Schwerpunktsaxe, so erhält man infolge dessen die Bewegungsgleichung

$$m\varkappa^2 \cdot \varphi'' = D - mr\varphi'' \cdot r\,.$$

Dies ist aber genau dieselbe Bewegungsgleichung, die man erhält, wenn man die Axe als fest annimmt und nur die äussere Kraft K einwirken lässt. Man hat nämlich in diesem Falle die Beziehung: Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe,

multiplicirt mit der Winkelbeschleunigung, ist gleich dem Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Drehungsaxe. Das letztere ist nun gleich dem Moment D des vorhin betrachteten Kräftepaares $(K, -K)$, und das Trägheitsmoment besitzt die Grösse $m(\varkappa^2 + r^2)$. Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$m(\varkappa^2 + r^2) \cdot \varphi'' = D.$$

Man braucht nur in der Gleichung auf Seite 157 das zweite Glied auf der rechten Seite nach der linken zu bringen, um die vollständige Uebereinstimmung jener mit dieser einzusehen.

Die Methode, einen um eine Axe drehbaren Körper als frei beweglich anzusehen und dafür die Reactionskräfte der Axe als äussere Kräfte für den Körper aufzufassen, lässt sich nun mit Vortheil verwenden, um die zweite der beiden Bewegungsgleichungen des in Betracht gezogenen Gliedersystems auf elementarem Wege abzuleiten.

Fasst man das System Unterarm plus Hand als frei beweglich auf, so wirken auf dasselbe ausser den direct an ihm angreifenden Kräften zunächst die in $\mathfrak{E}$ angreifenden Reactionscomponenten, welche diesen Kräften entgegengesetzt gleich sind; dieselben setzen sich mit den ursprünglichen Kräften zu Kräftepaaren zusammen. Ferner wirkt auf das System die in $\mathfrak{E}$ angreifende Reactionscomponente $m_2 r_2 \varphi_2''$, welche den Winkel φ_2 zu verkleinern strebt; dieselbe ist also negativ zu rechnen. Da der Angriffspunkt dieser Reactionscomponente um die Strecke r_2 vom Schwerpunkte S_2 entfernt ist, und da ihre Richtung senkrecht auf der Richtung von $S_2\mathfrak{E}$ steht, so ist ihr Drehungsmoment in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt S_2 gleich $-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2$. Weiterhin übt, wie früher (Seite 153) auseinandergesetzt worden ist, der Oberarm infolge seiner Winkelbeschleunigung φ_1'' mit seinem Ellbogenende einen Druck von der Grösse $m_2 l_1 \varphi_1''$ auf das System Unterarm plus Hand aus. Diese Druckkraft sucht ebenfalls den Winkel φ_2 zu verkleinern; sie greift in der Entfernung r_2 vom Schwerpunkte S_2 an und besitzt eine Richtung, welche von der zu $S_2\mathfrak{E}$ senkrechten Richtung um den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ abweicht. Das Drehungsmoment dieses Druckes in Bezug auf die Schwerpunktsaxe ist daher $-m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot r_2$.

Endlich zwingt, infolge der Kreisbewegung des Punktes $\mathfrak{E}$ der Ellbogenaxe um den Schultergelenkmittelpunkt, der Oberarm dem

Massensystem Unterarm plus Hand eine lineare Beschleunigung in der Richtung 𝔈𝔖 der Oberarmlängsaxe auf, welche gleich der Centripetalbeschleunigung des Punktes 𝔈 bei seiner Drehung um 𝔖 ist. Die Grösse dieser Centripetalbeschleunigung ist bei der Winkelgeschwindigkeit φ_1' des Oberarms: $l_1 \varphi_1'^2$. Um dem System Unterarm plus Hand diese lineare Beschleunigung zu ertheilen, ist aber eine Kraft von der Grösse $m_2 l_1 \varphi_1'^2$ erforderlich. Der Oberarm muss daher mit seinem Ellbogenende auf das System Unterarm plus Hand noch einen Druck von dieser Grösse in der Richtung 𝔈𝔖 ausüben[1]. Das Drehungsmoment dieser Druckkraft in Bezug auf die Axe durch den Schwerpunkt S_2 ist $-m_2 l_1 \varphi_1'^2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot r_2$, wobei das negative Zeichen dem Umstande entspricht, dass sie den Winkel φ_2 zu verkleinern strebt.

Von den äusseren Kräften sind nur die Spannungen der Muskeln in Betracht zu ziehen, welche am System Unterarm plus Hand ansetzen. Für jeden derartigen Muskel setzt sich die direct am System angreifende Muskelkraft mit der in 𝔈 angreifenden entgegengesetzt gleichen Reactionscomponente zu einem Kräftepaar zusammen, dessen Moment in den früheren Auseinandersetzungen mit D_2 bezeichnet worden ist. Wirken mehrere Muskeln gleichzeitig auf das System Unterarm plus Hand ein, so ist unter D_2 die Summe der Momente von allen zu den Muskeln gehörenden Kräftepaaren zu verstehen.

Die Summe aller dieser Drehungsmomente muss nun gleich sein dem Product aus dem Trägheitsmoment des starren Systems Unterarm plus Hand in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt S_2 und der Winkelbeschleunigung φ_2''.

Demnach lautet die zweite Bewegungsgleichung:

$$m_2 \varkappa_2^2 \cdot \varphi_2'' = D_2 - m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2 - m_2 l_1 \varphi_1'' \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot r_2 \\ - m_2 l_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot r_2 .$$

Um die Identität dieser Gleichung mit der zweiten Bewegungs-

1) Nach dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung muss dann natürlich auch umgekehrt das System Unterarm plus Hand in der Richtung 𝔖𝔈 mit der Stärke $m_2 l_1 \varphi_1'^2$ auf den Oberarm drücken. Diese Druckkraft brauchte aber bei der Aufstellung der ersten Bewegungsgleichung deshalb nicht mit in Betracht gezogen zu werden, weil ihre Richtung die Schulteraxe schneidet und ihr Drehungsmoment in Bezug auf diese Axe infolge dessen den Werth Null besitzt.

gleichung auf Seite 145 nachzuweisen, braucht man nur wieder alle Glieder, ausser D_2, auf die linke Seite zu bringen und die beiden mit dem Factor φ_2'' zusammenzufassen. Man erhält dann

$$m_2(\varkappa_2^2+r_2^2)\cdot\varphi_2''+m_2 l_1 r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1''+m_2 l_1 r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1'^2=D_2.$$

Dabei ist $m_2(\varkappa_2^2+r_2^2)$ das Trägheitsmoment vom System Unterarm plus Hand und infolge dessen auch zugleich vom reducirten Unterarmsystem in Bezug auf die Ellbogenaxe; denn bei letzterem System ist die Masse des ganzen Oberarms in die Ellbogenaxe verlegt zu denken und kann daher keinen Einfluss auf die Grösse des Trägheitsmomentes in Bezug auf diese Axe ausüben. Da der zugehörige Trägheitsradius des reducirten Unterarmsystems mit λ_2 bezeichnet worden ist, so kann man an Stelle von $m_2(\varkappa_2^2+r_2^2)$ auch $m_0\lambda_2^2$ setzen. Berücksichtigt man weiterhin wieder, dass $m_2 r_2 = m_0 c_2$ ist, so folgt aus der obigen Gleichung in der That:

$$m_0\lambda_2^2\cdot\varphi_2'' + m_0 l_1 c_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1'' + m_0 l_1 c_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\varphi_1'^2 = D_2\,.$$

Diese und die zugehörige Bewegungsgleichung auf Seite 156, in denen die Winkel, Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungsbeschleunigungen auf den Rumpf bezogen sind, kann man nun ohne Mühe auf die andere Form bringen, bei welcher der Drehungswinkel φ_1 im Schultergelenk in Verbindung mit dem Beugungsmittel ψ des Ellbogengelenks, sowie die Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungsbeschleunigungen in diesen beiden Gelenken vorkommen. Man hat nur zu beachten, dass

$$\varphi_2=\varphi_1+\psi\,;\quad \varphi_2'=\varphi_1'+\psi' \quad \text{und} \quad \varphi_2''=\varphi_1''+\psi''$$

ist. Setzt man diese Werthe in die beiden Bewegungsgleichungen ein, so ergiebt sich nach entsprechender Ordnung der einzelnen Glieder:

$$m_0(\lambda_1^2+l_1c_2\cos\psi)\cdot\varphi_1''+m_0 l_1 c_2\cos\psi\cdot\psi''-m_0 l_1 c_2\sin\psi\cdot(\varphi_1'+\psi')^2=D_1$$

$$m_0\lambda_2^2\cdot\psi''+m_0(\lambda_2^2+l_1c_2\cos\psi)\cdot\varphi_1''+m_0 l_1 c_2\sin\psi\cdot\varphi_1'^2=D_2.$$

Diese beiden Gleichungen sind zusammen äquivalent den beiden auf exactem Wege abgeleiteten Bewegungsgleichungen auf Seite 147. Es sind nur bei jenem Paare nicht die beiden, soeben abgeleiteten, Gleichungen selbst angeführt, sondern an Stelle der ersten steht die

Summe dieser beiden. Bei Addition derselben erhält man nämlich nach Entwickelung des Quadrates von $\varphi_1' + \psi'$ die Gleichung:

$$m_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2l_1c_2\cos\psi)\cdot\varphi_1'' + m_0(\lambda_2^2 + l_1c_2\cos\psi)\cdot\psi''$$
$$- 2m_0l_1c_2\sin\psi\cdot\varphi_1'\psi' - m_0l_1c_2\sin\psi\quad\psi'^2 = D_1 + D_2\,.$$

Aus jedem der beiden Paare von Bewegungsgleichungen müssen sich nun alle Einzelheiten des Bewegungsvorganges ableiten lassen.

Trotzdem die Bedeutung der Bewegungsgleichungen leichter zu verstehen ist, wenn man sich auf die Form bezieht, in welcher die Drehungswinkel, Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungsbeschleunigungen beider Glieder relativ zum Rumpfe genommen sind, so sollen für die weitere Discussion doch die aus jenen abgeleiteten Bewegungsgleichungen verwendet werden, in denen die Drehung des starren Systems Unterarm plus Hand auf den Oberarm bezogen ist. Man trägt damit, wie schon gesagt, dem anatomischen Gebrauche Rechnung und gewinnt dadurch auf der anderen Seite den Vortheil, die Endresultate besser verstehen zu können. Es liegt der directen Anschauung näher, bei der Veränderung einer Gliederstellung auf die Drehungen in den Gelenken zu achten, als die Drehungen sämmtlicher Glieder auf einen entfernteren Körpertheil, wie den Rumpf, oder gar auf den als ruhend gedachten Raum zu beziehen.

Wir werden daher von nun an nur von dem Gleichungenpaar auf Seite 160, und eventuell von der aus ihnen durch Addition abgeleiteten Gleichung auf der vorliegenden Seite Gebrauch machen.

Ein Muskel ändert im Verlaufe seiner Contraction in Folge der Aenderung der Gelenkstellungen seine Einwirkung auf die einzelnen Glieder im Allgemeinen fortwährend. Wenn sich z. B. der M. brachialis contrahirt, so wird er bei gleicher Kraftentwickelung andere Drehungen im Ellbogengelenk und Schultergelenk hervorbringen, wenn der Arm vor der Contraction gestreckt, als wenn er stark gebeugt war. Dies lehrt die blosse Ueberlegung; man braucht nur zu beachten, dass der Muskel im letzteren Falle ganz anderer Lagerung der Massen gegenübersteht, als im ersteren Falle. Dies lehren ferner die eingangs beschriebenen Versuche. Dies lehrt ein Blick auf die Bewegungsgleichungen, bei denen die Grösse des Beugungswinkels ψ im Ellbogengelenk eine bestimmende Rolle spielt.

Zum Verständniss der Leistungen eines Muskels ist es nun von der grössten Wichtigkeit, zu wissen, in welcher Weise die einzelnen Glieder von der Ruhe aus bei den verschiedenen Gelenkstellungen ihre Bewegung beginnen, wenn der Muskel sich contrahirt. Diese Frage ist es, welche man beantworten will, wenn man z. B. sagt: »bei der Gelenkstellung wirkt der Muskel streckend, bei der Stellung dagegen beugend auf das Gelenk ein«. Genau genommen darf man für diese Untersuchung immer nur ein ganz kleines Stück der Bewegung in Betracht ziehen; denn der Muskel sieht sich gewöhnlich schon nach einer geringen Stellungsänderung der Glieder anderen Verhältnissen gegenüber. Es kommt dabei, wenn der Muskel nur auf ein Gelenk wirken kann, weniger auf die Schnelligkeit der Bewegung an — diese kann durch geringere oder stärkere Spannung des Muskels verändert werden —, als vielmehr auf den Drehungssinn der Gelenkbewegung — dieser wird im Allgemeinen von der Grösse der Muskelspannung nicht beeinflusst. Wirkt der Muskel auf zwei Gelenke bewegend ein, so kommt ausser dem Drehungssinn der beiden Gelenkbewegungen auch nur das Verhältniss ihrer Drehungsgrössen, bezüglich nur das Verhältniss der erlangten Drehungsgeschwindigkeiten, in Betracht, nicht aber ihre absolute Grösse. Denn diese Verhältnisse sind im Allgemeinen ebenfalls von der Grösse der Muskelspannung unabhängig. Wenn man gefunden hat, dass von einer bestimmten Gelenkstellung aus ein Armmuskel bei seiner Contraction eine dreimal so grosse Drehung im Ellbogengelenk bewirkt als im Schultergelenk, so wird zwar bei doppelter Spannung die in derselben Zeit stattfindende Drehung im Ellbogengelenk wie im Schultergelenk im Allgemeinen jetzt doppelt so gross ausfallen, dagegen wird das Verhältniss beider Drehungen immer noch den Werth 3 : 1 besitzen.

Die in einer sehr kleinen Zeit den einzelnen Gliedern aus der Ruhe ertheilten Drehungsgeschwindigkeiten und die Drehungswinkel selbst sind nun proportional den Drehungsbeschleunigungen, welche der Muskel hervorruft; denn für eine sehr kleine Zeit können die letzteren als constant aufgefasst werden. Es wird daher das Verhältniss der Drehungen im Schultergelenk und Ellbogengelenk im Anfang der Contraction eines Armmuskels aus der Ruhe für irgend welche Gelenkstellungen durch das Verhältniss $\varphi_1'' : \psi''$ der beiden Drehungsbeschleunigungen gemessen.

Der Werth dieses Verhältnisses kann aus den beiden Bewegungsgleichungen auf Seite 160 ohne Mühe berechnet werden. Da die Bewegung aus der Ruhe untersucht werden soll, so sind die Drehungsgeschwindigkeiten φ_1', ψ', welche im Moment der Einwirkung des Muskels schon vorhanden sein sollen, für diesen Zweck gleich Null anzunehmen. Dadurch vereinfachen sich die beiden Gleichungen wesentlich. Man hat nur noch

$$m_0(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\cdot\varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos\psi\cdot\psi'' = D_1$$
$$m_0(\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\cdot\varphi_1'' + m_0\lambda_2^2\cdot\psi'' = D_2\,.$$

Dieselben stellen zwei Gleichungen für die zu bestimmenden Grössen φ_1'', ψ'' dar. Ihre Auflösung ergiebt zunächst

$$\varphi_1'' = \frac{1}{m_0}\cdot\frac{D_1\cdot\lambda_2^2 - D_2\cdot l_1 c_2\cos\psi}{[\lambda_1\lambda_2]^2 - [l_1 c_2\cos\psi]^2}\,.$$
$$\psi'' = \frac{1}{m_0}\cdot\frac{D_2(\lambda_1^2 + l_1 c_2\cos\psi) - D_1(\lambda_2^2 + l_1 c_2\cos\psi)}{[\lambda_1\lambda_2]^2 - [l_1 c_2\cos\psi]^2}\,,$$

und hieraus folgt für das Verhältniss beider Grössen, wenn man gleichzeitig Zähler und Nenner durch D_2 dividirt:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\frac{D_1}{D_2}\cdot\lambda_2^2 - l_1 c_2\cos\psi}{\lambda_1^2 + l_1 c_2\cos\psi - \frac{D_1}{D_2}(\lambda_2^2 + l_1 c_2\cos\psi)}\,.$$

Aus dem Ausdruck für diesen Quotienten ist ersichtlich, dass das Drehungsverhältniss in beiden Gelenken nicht von der Grösse, sondern nur von dem Verhältniss der Massen der beiden Gliederabschnitte abhängt; denn die Grössen λ_1, λ_2, l_1 und c_2 ändern sich nur, wenn das Massenverhältniss ein anderes wird. Es geht ferner aus dem Ausdruck klar hervor, dass das Drehungsverhältniss auch nicht von dem absoluten Werthe der Muskelspannung abhängt; denn die beiden Drehungsmomente sind proportional der Muskelspannung. Wird diese verdoppelt, so verdoppeln sich auch die Werthe von D_1 und D_2; ihr Verhältniss bleibt dagegen unverändert. Das Verhältniss $\frac{D_1}{D_2}$ ist allein von der Lage der Insertionsstellen abhängig, denn die bei beiden als Factor auftretende Muskelspannung hebt sich fort.

Da bei der Aufstellung des obigen Quotienten über die Grösse von D_1 und D_2 gar keine Voraussetzungen gemacht worden sind, so gilt dieser Ausdruck für alle Arten von Muskeln, welche drehend auf die Theile des Armes einwirken.

Handelt es sich nun ausschliesslich um solche Muskeln, welche ihren Ursprung am Oberarm und ihren Ansatz am starren System Unterarm plus Hand besitzen, so erfährt der Quotient noch eine bemerkenswerthe Vereinfachung. Für diese Muskeln sind nämlich, wie schon mehrfach angeführt worden ist, die beiden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich. Man hat daher für das Verhältniss derselben stets den Werth -1. Setzt man nun $\frac{D_1}{D_2} = -1$ in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = -\frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi}.$$

Es besitzt daher im Allgemeinen dieses Verhältniss für jede Grösse des Beugungswinkels ψ im Ellbogengelenk einen bestimmten endlichen Werth.

Da in dem Ausdruck auf der rechten Seite ausser den constanten Längen λ_1, λ_2, l_1, c_2 nur noch der Beugungswinkel ψ des Ellbogengelenks, nicht aber der Drehungswinkel φ_1 des Schultergelenks und vor allen Dingen nicht die Drehungsmomente des Muskels vorkommen, so liegt hierin der wichtige Satz theoretisch begründet:

Satz: Bei alleiniger Contraction eines oder mehrerer Beuge- oder Streckmuskeln, welche ihren Ursprung am Oberarm nehmen und an dem als starr aufgefassten System Unterarm plus Hand ansetzen, wird im Allgemeinen nicht nur eine Bewegung im Ellbogengelenk, sondern auch eine solche im Schultergelenk hervorgerufen, trotzdem die Muskeln gar nicht über das Schultergelenk hinwegziehen; dabei ist das Verhältniss der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk, welche die Muskeln bei irgend welchen Gelenkstellungen von der Ruhe aus im Anfang ihrer Contraction verursachen, ganz unabhängig von der Lage der Insertionsstellen der Muskeln; der

Werth dieses Verhältnisses wird allein durch die Beugestellung im Ellbogengelenk bestimmt.

Dass das Verhältniss der beiden Gelenkbewegungen nicht auch durch die Stellung im Schultergelenk, über welches die Muskeln gar nicht hinwegziehen, beeinflusst wird, liess sich voraussagen.

Da für $\psi = 0$ bis zu $\psi = 90^\circ$ der Werth von $\cos\psi$ positiv ist, und da auch die vier in dem Ausdruck für $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ auftretenden Längen positive Werthe besitzen, so erkennt man weiterhin, dass infolge des vor dem Quotienten stehenden negativen Vorzeichens das Drehungsverhältniss von der Streckstellung ($\psi = 0$) an bis mindestens zu der rechtwinkligen Beugestellung ($\psi = 90^\circ$) des Ellbogengelenks negativ ist. Daraus folgt, dass für diese und alle zwischenliegenden Gelenkstellungen die beiden Drehungen zu Anfang der Muskelcontraction in entgegengesetztem Drehungssinn verlaufen. Wirken nur Beugemuskeln des Ellbogengelenks, oder überwiegen die Drehungsmomente der Beugemuskeln über die der sich etwa zugleich contrahirenden Streckmuskeln, so findet Beugung im Ellbogengelenk mit gleichzeitiger Rückwärtsdrehung im Schultergelenk statt. Contrahiren sich dagegen nur Streckmuskeln, oder überwiegen die Drehungsmomente derselben über die der sich gleichzeitig contrahirenden Beugemuskeln, so findet Streckung im Ellbogengelenk mit gleichzeitiger Vorwärtsdrehung im Schultergelenk statt.

Geht die Haltung des Armes über die rechtwinklige Beugestellung im Ellbogengelenk hinaus, so wird $\psi > 90^\circ$. Es nimmt dann $\cos\psi$ einen negativen Werth an. Zähler und Nenner des Verhältnisses bleiben aber zunächst noch positiv; der Zähler wird nur kleiner wie λ_2^2 und der Nenner kleiner wie $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, Werthe, welche dieselben für $\psi = 90^\circ$ eingenommen haben. Es kann aber bei weiter wachsendem ψ vorkommen, dass das Glied $l_1 c_2 \cos\psi$ so stark negativ wird, dass der Zähler den Werth Null annimmt. Wenn dann nicht auch der Nenner Null wird, was ausgeschlossen ist, so lange λ_1 und λ_2 von einander verschieden sind, so wird in diesem Falle der Werth des Drehungsverhältnisses selbst Null, d. h. es findet von der betreffenden Gelenkstellung aus nur Bewegung im Ellbogengelenk, aber keine Drehung im Schultergelenk statt. Der Beugungswinkel ψ_e des

Ellbogengelenks, bei welchem dieser Fall eintritt, ist charakterisirt durch die Beziehung

$$\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cdot \cos \psi_e = 0 .$$

Für den Cosinus dieses ausgezeichneten Beugungswinkels ergiebt sich hieraus

$$\cos \psi_e = -\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2} .$$

Aus dem negativen Zeichen ist zu ersehen, dass der Winkel ψ_e grösser wie 90° sein muss. Die Entscheidung, ob die zum Werthe von ψ_e gehörende Beugestellung überhaupt angenommen werden kann, lässt sich erst treffen, nachdem man für λ_2, l_1 und c_2 die Werthe eingesetzt hat.

Endlich wäre der Fall nicht ausgeschlossen, dass für einen bestimmten Beugungswinkel der Nenner des Drehungsverhältnisses den Werth Null annimmt. Dem würde ein unendlich grosser Werth des Drehungsverhältnisses entsprechen; das heisst aber nichts anderes als, in diesem Falle würde bei der Contraction der Muskeln nur Drehung im Schultergelenk, aber keine Drehung im Ellbogengelenk vor sich gehen. Bezeichnet man den Winkel, für welchen dies eintritt, mit ψ_s, so hat man zur Bestimmung von $\cos \psi_s$ die Formel:

$$\cos \psi_s = -\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2 l_1 c_2} .$$

Auch dieser Winkel müsste also grösser wie 90° sein. Ob die durch ihn charakterisirte Beugestellung im Ellbogengelenk überhaupt eingenommen werden kann, dies lässt sich ebenfalls erst unter Berücksichtigung der bestimmten Werthe für λ_1, λ_2, l_1, c_2 entscheiden.

Es sind die Werthe dieser Constanten absichtlich bisher weder in die Bewegungsgleichungen, noch in die aus ihnen abgeleiteten Resultate eingesetzt worden, weil diese Gleichungen und Formeln in ihrer unbestimmten Form nicht allein den Verhältnissen des unbelasteten menschlichen Armes entsprechen, sondern auch denen des belasteten Armes und überhaupt aller Systeme von zwei durch ein Charniergelenk mit einander verbundenen Gliedern, von welchen das eine um eine zur Charnieraxe parallele feste Axe drehbar ist. Ausserdem kann man nur aus der unbestimmten Form erkennen, ob manche Resultate individuellen Schwankungen unterworfen sein werden, oder ob sie allgemeine Gültigkeit besitzen.

Es ist an einer früheren Stelle schon betont worden, dass zwar die Gesammtmasse des Armes bei verschiedenen Individuen ganz verschieden ausfallen wird, dass dagegen das Massenverhältniss der einzelnen Armabschnitte bei normalen Menschen im Grossen und Ganzen das gleiche sein wird. Daraus folgt, dass die Trägheitsradien λ_1, λ_2 und die Hauptstrecke c_2, welche ausser von den Längen der Glieder nur von dem Verhältniss der Massen von Oberarm einerseits und dem System Unterarm plus Hand andererseits abhängen, für alle Individuen von gleicher Armlänge dieselbe Grösse besitzen werden. Natürlich kann dieser Satz nur so lange Gültigkeit besitzen, als die Armtheile nicht durch fremde Massen beschwert sind. Ein in der Hand gehaltenes Gewicht würde sofort die Masse des Unterarms vergrössern und das Massenverhältniss der Armabschnitte verändern. Aus dem Zusammenhang der drei Grössen λ_1, λ_2, c_2 mit den Dimensionen des Armes folgt weiter, dass dieselben bei entsprechender Massenvertheilung proportional mit der Länge des Arms wachsen und abnehmen, dass also z. B. die Verhältnisse derselben zu der Länge l_1 des Oberarms ebenfalls individuellen Schwankungen fast nicht ausgesetzt sind.

Dividirt man in dem Ausdruck für das Drehungsverhältniss von Schulter- und Ellbogengelenk auf Seite 164 Zähler und Nenner durch l_1^2, so wird dadurch der Werth des Quotienten natürlich nicht geändert; der letztere nimmt aber dann die Form an:

$$-\frac{\left(\frac{\lambda_2}{l_2}\right)^2+\frac{c_2}{l_1}\cdot\cos\psi}{\left(\frac{\lambda_1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2}{l_1}\right)^2+2\frac{c_2}{l_1}\cdot\cos\psi}.$$

Daraus erkennt man, dass das Drehungsverhältniss in Wirklichkeit nicht von den absoluten Grössen von λ_1, λ_2, c_2, l_1 abhängt, sondern nur von den Verhältnissen der drei ersten zu dem letzten. Nach den obigen Auseinandersetzungen folgt hieraus wiederum der

Satz: Das Verhältniss der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk, welche ein allein zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm plus Hand sich erstreckender Muskel im Anfang seiner Contraction aus der Ruhe bei den verschiedenen Beugestellungen im Ellbogen-

gelenk hervorbringt, ist bei unbelastetem Arm entweder gar keinen oder doch jedenfalls nur sehr geringen individuellen Schwankungen unterworfen.

Es lassen sich daher die diesbezüglichen Resultate, welche man für einen bestimmten Arm abgeleitet hat, ohne Weiteres als für die Arme sämmtlicher Menschen gültig annehmen.

Es geht ferner daraus hervor, dass man berechtigt ist, die Drehungen an einem Modell zu studiren, welches ganz andere Massen und ganz andere Dimensionen in seinen Theilen besitzt, als der Arm selbst, wenn nur einerseits das Verhältniss der Massen und andererseits das Verhältniss der Längen und Trägheitsradien der beiden Glieder des Modells gleich den entsprechenden Verhältnissen der beiden Abschnitte des Armes sind. —

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass vor der Contraction der Muskeln die Abschnitte des Armes sich zu einander und relativ zum Rumpfe in Ruhe befinden. Wir gewannen unter dieser Voraussetzung einen Einblick in die Wirkung der in Frage stehenden Muskeln zu Anfang der Contraction, d. h. über den Anfang der Drehungen, welche durch die Contraction hervorgerufen werden. Es ist damit aber noch keineswegs das Gesetz erkannt, welches die Drehungen in den beiden Gelenken befolgen, wenn der Muskel sich während einer endlichen Zeit contrahirt und dadurch fortwährend neue Bewegungsimpulse auf die beiden Armtheile ausübt. Ja es ist sogar dadurch noch nicht einmal ermittelt, wie diese Drehungen sich fortsetzen würden, wenn der Muskel thatsächlich nur einen einzigen Impuls ausüben würde, und dann das System sich selbst überlassen bliebe. Es würden nämlich auch in diesem letzten Falle die Drehungsgeschwindigkeiten in den beiden Gelenken nicht unverändert beibehalten werden können. Denn durch die bei der Drehung der beiden Armabschnitte auftretenden Centrifugalkräfte und durch die in der Axe des Schultergelenks sich geltend machenden Reactionskräfte werden die beiden Drehungsgeschwindigkeiten beeinflusst. Die Drehungsbeschleunigungen, welche allein von diesen Kräften herrühren, könnte man ebenfalls aus den Bewegungsgleichungen auf Seite 160 erhalten, indem man in denselben die Drehungsmomente D_1 und D_2 gleich Null setzte, nicht aber die Drehungsgeschwindigkeiten φ_1', ψ', und nun die beiden Gleichungen nach den unbekannten

Drehungsbeschleunigungen φ_1'' und ψ'' auflöste. Da dies vorläufig von untergeordnetem Interesse ist, so soll diese Rechnung, welche sich übrigens ohne Mühe ausführen lässt, an dieser Stelle nicht angeführt werden.

Aus den soeben angestellten Betrachtungen geht hervor, dass die Drehungsbeschleunigungen, welche ein Muskel in den beiden Gelenken hervorbringt, andere sein werden, wenn bei der Contraction der ganze Arm schon in Bewegung ist, als wenn die Contraction von ruhender Haltung des Armes ausgeht. Die Grösse der diesem allgemeineren Falle entsprechenden Drehungsbeschleunigungen wird man durch Auflösen der beiden Bewegungsgleichungen auf Seite 160 nach φ_1'', ψ'' erhalten, wenn man keiner in denselben auftretenden Grösse den speciellen Werth Null ertheilt. Auch dies lässt sich ohne Mühe ausführen.

Die Angabe der aus dieser letzteren Rechnung folgenden Resultate soll auch vorläufig unterbleiben. Selbst wenn man mit Hilfe der resultirenden Formeln die Grössen der Drehungsbeschleunigungen, bezüglich deren Verhältnis, für alle möglichen Beugestellungen und alle möglichen Anfangsgeschwindigkeiten berechnet hätte, so würde man dadurch doch noch keinen genügenden Einblick in den Verlauf der Bewegung bei andauernder Contraction des Muskels gewonnen haben. Denn dies setzte voraus, dass man wüsste, welche Drehungsgeschwindigkeiten thatsächlich in jedem Moment der Bewegung vorhanden sind. Diese Geschwindigkeiten können, wenn einmal die Bewegung eingeleitet ist, nicht mehr willkürlich angenommen werden; sie sind ein Product der Drehungsbeschleunigungen, welche der Muskel bei fortgesetzter Contraction in den aufeinanderfolgenden Momenten den Gliederabschnitten ertheilt. Wie also einerseits die Drehungsbeschleunigungen selbst durch die Drehungsgeschwindigkeiten beeinflusst werden, so hängen andererseits die letzteren wieder von den ersteren ab. Die beiden Bewegungsgleichungen auf Seite 160 können geradezu als der Ausdruck für diese gegenseitige Abhängigkeit von Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungsbeschleunigungen aufgefasst werden. Da nun beide Grössen durch die Kraftäusserung der Muskeln verursacht werden, so muss es infolge dieser gegenseitigen Beziehung möglich sein, die Drehungsgeschwindigkeiten allein aus den Drehungsmomenten der Muskeln abzuleiten. Dazu ist jedoch

nöthig, dass man dem stetigen Wechsel der Drehungsgeschwindigkeiten zu folgen vermag. Dies ist aber nur möglich mit Hülfe der Methoden der Differential- und Integralrechnung. In der Sprache der Mathematik ausgedrückt, stellen die erstrebten Beziehungen zwischen Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungsmomenten die Integrale der auf Seite 160 niedergelegten Beziehungen zwischen Drehungsbeschleunigungen, Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungsmomenten der Kräfte dar. Auch die Beziehung zwischen dem Verhältniss der beiden Drehungsgeschwindigkeiten im Schulter- und Ellbogengelenk lässt sich nicht auf elementarem Wege ableiten, sondern nur auf dem Wege der Integration. Es muss daher von Denjenigen, welche die mächtigen Waffen, die die Differential- und Integralrechnung zur Erforschung der stetigen Naturvorgänge darbieten, nicht zu gebrauchen wissen, das schliessliche Resultat als etwas Gegebenes hingenommen werden. Dasselbe findet sich in den früheren Entwicklungen auf exactem Wege schon abgeleitet und auf Seite 149 niedergelegt. Es lautet:

Satz: Bei der Bewegung, welche ein allein zwischen Oberarm und dem starren System Unterarm plus Hand hinziehender Muskel von der Ruhe aus dem im Ellbogengelenk gegliederten Arm ertheilt, wird das Verhältniss der Drehungsgeschwindigkeiten φ_1' und ψ' im Schulter- und Ellbogengelenk während des ganzen Verlaufes der Bewegung durch den Quotient

$$-\frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi}$$

gemessen.

Es gilt also der früher für den Anfang der Bewegung gefundene Satz für den ganzen Verlauf der Gliederbewegung, ein Resultat, welches keineswegs von vorn herein selbstverständlich war. Das Resultat ist um so überraschender, als jener Satz zur Voraussetzung hatte, dass zur Zeit der Contraction keine Drehungsgeschwindigkeiten vorhanden waren, während im Verlaufe der fortdauernden Contraction, mit Ausnahme des Anfangs, der Muskel fortwährend Drehungsgeschwindigkeiten bei beiden Gliederabschnitten vorfindet.

Die einzige Voraussetzung für dieses Resultat ist die, dass vor der Contraction der Arm sich in Ruhe befand; die Stellung, welche

er vor der Contraction eingenommen hat, ist dabei ganz gleichgültig. Wenn z. B. der Arm aus der rechtwinkligen Beugestellung des Ellbogengelenks ($\psi = 90^\circ$) heraus gebeugt oder gestreckt wird, so wird das Verhältniss der Drehungsgeschwindigkeiten, welche sich zu Anfang im Schulter- und Ellbogengelenk einstellen, genau das gleiche sein, als ob der Arm von einer geringeren Beugestellung aus gebeugt oder von einer grösseren Beugestellung aus gestreckt wird, und nun gerade die rechtwinklige Beugestellung passirt.

Dieses Resultat bringt noch eine andere wichtige Erkenntniss. Wir sahen früher, dass das Verhältniss der Anfangsgeschwindigkeiten, mit welchen die Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk vor sich gehen, von der Spannung und den Insertionsstellen des Muskels ganz unabhängig war, so lange es sich nur um Muskeln handelte, welche am Oberarm, aber nicht ausserhalb des Armes ihren Ursprung nahmen. Jetzt haben wir erkannt, dass auch das Verhältniss der Drehungsgeschwindigkeiten im ganzen Verlaufe der Bewegung nicht von der Muskelspannung und den Muskelinsertionen abhängt, denn in dem obigen Ausdruck für das Verhältniss $\varphi_1' : \psi'$ kommt das Drehungsmoment des Muskels gar nicht mehr vor. Daraus folgt aber, dass das Verhältniss der in einer gewissen Zeit im Schulter- und Ellbogengelenk zurückgelegten Drehungswinkel von der Spannung und den Insertionen der in Betracht gezogenen Muskeln ganz unabhängig ist, dass also dieses Verhältniss durch keine Aenderung von Muskelspannung und Muskelinsertionen verändert werden kann. Durch Vergrösserung der Muskelspannung wird man allein die absolute Geschwindigkeit vergrössern können, mit welcher die Stellungsänderung vor sich geht. Wenn aber die Beugung im Ellbogengelenk um einen bestimmten Winkel vorgeschritten ist, mag dies langsam oder schnell geschehen sein, so wird unter allen Umständen auch eine ganz bestimmte Drehung im Schultergelenk vor sich gegangen sein. Oder mit anderen Worten: Die aufeinanderfolgenden Haltungen des Armes werden stets dieselben sein. Ein Unterschied kann durch die Aenderung der Muskelspannung und Muskelinsertionen nur insofern erzielt werden, als das eine Mal diese bestimmten momentanen Haltungen des Armes, die be-

stimmten Bewegungsphasen des Armes, schnell, das andere Mal langsam durchlaufen werden. Man hat es also, so lange nur Armmuskeln mit dem Ursprunge am Oberarm wirken, mit einer zwangläufigen Gliederbewegung zu thun. Eine andere Bewegungsart des Armes kann allein durch Muskeln, welche ihren Ursprung ausserhalb des Armes, am Rumpfe, haben, und durch äussere Kräfte, wie die Schwere, bewirkt werden.

Die genaue Beziehung zwischen dem Drehungswinkel φ_1 im Schultergelenk und dem Beugungswinkel ψ im Ellbogengelenk kann aus der Relation für die Drehungsgeschwindigkeiten

$$\frac{\varphi_1'}{\psi'} = -\frac{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi}$$

allein wieder auf dem Wege der Integration hergeleitet werden. Dies ist früher schon gethan und das Resultat auf Seite 150 niedergelegt worden. Dasselbe lautet:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 4 l_1^2 c_2^2}} \operatorname{arctang}\left\{\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 l_1 c_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2}} \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right\} - \frac{\psi}{2} + \alpha.$$

Die in dieser Relation neu auftretende Grösse α bedeutet den Winkel, welchen die Längsaxe des Oberarms mit der zum Rumpfe festen Geraden $\mathfrak{S}A$ (Figur 6 auf Seite 109) bildet, während der Unterarm im Ellbogengelenk gegen den Oberarm gestreckt ist. Es ist gar nicht nöthig, dass der Arm bei seiner Gliederbewegung diese Haltung, bei welcher das Ellbogengelenk gestreckt ist, einmal einnimmt; dies wäre z. B. ausgeschlossen, wenn er von einer beliebigen Beugestellung des Ellbogengelenks aus durch den Zug der eingelenkigen Muskeln noch weiter gebeugt würde. Man kann sich aber dann die Anfangsstellung aus der Streckstellung im Ellbogengelenk durch alleinige Wirkung innerer Armmuskeln hervorgebracht denken, dann wird, da unter dieser Voraussetzung die ganze Bewegung nur in einer ganz bestimmten Art und Weise vor sich gehen kann, dem gestreckten Arm eine ganz bestimmte Stellung im Schultergelenk zukommen, welche eben durch den Winkel α charakterisirt ist. Auf die Bewegung selbst hat der Winkel α gar keinen Einfluss, denn das Verhältniss der Drehungsgeschwindigkeiten ist von demselben unabhängig. Dagegen ist es selbstverständlich, dass der Drehungswinkel im Schultergelenk φ_1 (d. h.

der Winkel zwischen der Längsaxe des Oberarmes und der im Raume festen Geraden $\mathfrak{S}A$) bei demselben Beugungswinkel ψ des Ellbogengelenks für jede Bewegungsphase um den Winkel α grösser sein muss, wenn bei der Streckstellung des Ellbogengelenks die Oberarmlängsaxe mit der Geraden $\mathfrak{S}A$ den Winkel α bildet, als wenn sie mit dieser Geraden zusammenfällt. —

Mit Hülfe der aufgefundenen Relationen zwischen Drehungsbeschleunigungen, Drehungsgeschwindigkeiten und Drehungswinkeln lässt sich nun der Verlauf der Bewegung eines, den gemachten Voraussetzungen entsprechenden, Gliedersystems vorausberechnen, wenn man die mechanisch in Betracht kommenden Grössen, wie Massen, Trägheitsmomente, Schwerpunktsentfernungen und Längen der Glieder empirisch für das bestreffende System bestimmt hat.

Für den Arm des Menschen hatte sich bei der gewählten Bezeichnungsweise der einzelnen Grössen ergeben (vergl. Seite 132 ff.):

$$m_0 = 3683 \text{ g}\,; \quad l_1 = 30{,}3 \text{ cm}\,; \quad c_2 = 9{,}16 \text{ cm}\,;$$

$$\lambda_1^2 = 581{,}19 \text{ cm}^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 = 248{,}08 \text{ cm}^2\,.$$

Infolge dessen lauten die auf Seite 160 in allgemeiner Form niedergelegten Bewegungsgleichungen:

$$[2140500 + 1021900 \cos\psi] \cdot \varphi_1'' + 1021900 \cos\psi \cdot \psi''$$
$$- 1021900 \sin\psi \cdot (\varphi_1' + \psi')^2 = D_1$$

$$913700 \cdot \psi'' + [913700 + 1021900 \cos\psi] \cdot \varphi_1'' + 1021900 \sin\psi \cdot \varphi_1'^2 = D_2.$$

Bei alleiniger Contraction von Armmuskeln, welche ihren Ursprung am Oberarm nehmen, erhält man nach Seite 164 für den Anfang der Bewegung als Werth des Verhältnisses der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk in der einfachsten Form:

$$-\frac{0{,}894 + \cos\psi}{2{,}989 + 2\cos\psi}\,.$$

Die Stellung, von welcher aus allein eine Drehung im Ellbogengelenk, ohne gleichzeitige Drehung des Schultergelenks, stattfindet, ist durch den Werth ψ_e des Beugungswinkels ψ charakterisirt, welcher den Zähler dieses Verhältnisses zu Null macht (vergl. auch Seite 166). Als Cosinus von ψ_e ergiebt sich

$$\cos\psi_e = -\,0{,}894$$

und hieraus als Werth des Beugungswinkels selbst $\psi_e = 153^\circ 20'$.

Dieser Winkel entspricht ungefähr der extremsten Beugestellung, welche im Ellbogengelenk überhaupt eingenommen werden kann.

Die Stellung, von welcher aus allein Drehung im Schultergelenk, aber keine Gelenkbewegung im Ellbogengelenk stattfinden würde, wäre dagegen durch den Werth ψ_s des Beugungswinkels ψ charakterisirt, welcher den Nenner des Drehungsverhältnisses zu Null macht. Der Cosinus dieses Winkels müsste, wie man leicht übersieht, den Werth $-1{,}4945$ besitzen. Da der Werth des Cosinus eines Winkels stets zwischen den beiden Grenzen $+1$ und -1 liegen muss, also niemals $-1{,}4945$ betragen kann, so geht daraus hervor, dass eine solche Haltung des Armes, von welcher aus im Anfang der Muskelcontraction nur Drehung im Schultergelenk, ohne gleichzeitige Drehung im Ellbogengelenk, stattfinden würde, überhaupt nicht existirt.

Um einen genauen Ueberblick über die mit dem Beugungswinkel ψ wechselnde Grösse des Verhältnisses zwischen den Drehungen im Schulter- und Ellenbogengelenk zu gewinnen, ist der Werth dieses Verhältnisses für alle Beugungswinkel von 15° zu 15° nach der Formel auf Seite 173 berechnet und in folgender Tabelle niedergelegt worden:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk	0° (Streckstellung)	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150° (äusserste Beugestellung)
Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk zu Anfang der Muskelcontraction aus der Ruhe	−0,380	−0,378	−0,373	−0,364	−0,349	−0,329	−0,299	−0,257	−0,198	−0,119	−0,022

Für den Beugungswinkel von 153° 20′ würde nach den obigen Auseinandersetzungen das Drehungsverhältniss direct den Werth Null annehmen.

Aus der Tabelle erkennt man zunächst die Richtigkeit der schon ausgesprochenen Thatsache, dass die beiden Drehungen stets in entgegengesetztem Drehungssinn vor sich gehen, denn alle Werthe des Drehungsverhältnisses besitzen das negative Vorzeichen. Bewirkt der Muskel, oder eine ganze Gruppe innerer Armmuskeln, eine Beugebewegung des Ellbogengelenks, so stellt sich gleichzeitig eine Drehung im Schultergelenk nach hinten, d. h. eine Streckung, ein. Dreht

dagegen die Muskelgruppe den Unterarm gegen den Oberarm im Sinne der Streckung im Ellbogengelenk, so wird gleichzeitig der Oberarm im Schultergelenk nach vorn gedreht, bezüglich gebeugt.

Man leitet weiterhin aus der Tabelle ab, dass, abgesehen vom Vorzeichen, das Verhältniss der Drehungen mit zunehmender Beugung abnimmt, und umgekehrt, dass es bei abnehmender Beugung, d. h. bei zunehmender Streckung des Ellbogengelenks, wächst. Bliebe das Drehungsverhältniss eine Zeit lang constant, etwa während einer Beugung oder Streckung von 30° im Ellbogengelenk, so würde bei den verschiedenen durch den Winkel ψ charakterisirten Ausgangsstellungen des Armes die gleichzeitige Drehung im Schultergelenk folgende Werthe besitzen:

Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Drehung im Ellbogengelenk	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°
Drehung im Schultergelenk	−11°24′	−11°20′	−11°11′	−10°55′	−10°28′	−9°52′	−8°58′	−7°43′	−5°56′	−3°34′	−0°40′

Diese Werthe gelten für beide Bewegungsarten, sowohl für die Beugebewegung als für die Streckbewegung des Ellbogengelenks. Wenn also z. B. der Arm aus der rechtwinkligen Beugestellung im Ellbogengelenk ($\psi = 90°$) um 30° durch die Contraction der betreffenden Muskeln weiter gebeugt wird, so wird gleichzeitig der Oberarm um ca. 9° im Schultergelenk rückwärts gedreht. Die Tabelle sagt aber auch aus, dass bei einer Streckung des Ellbogengelenks um 30° von der rechtwinkligen Beugestellung aus der Oberarm im Schultergelenk um ca. 9° gleichzeitig nach vorn gedreht wird.

Der angenommene Drehungswinkel von 30° im Ellbogengelenk giebt nun nicht etwa an, dass bei der Drehung die Richtung der Unterarmlängsaxe im Raume bezüglich relativ zum Rumpfe sich um 30° geändert habe; er sagt also z. B. nicht aus, dass bei der Bewegung aus der Streckhaltung des ganzen Arms, bei welcher die Längsaxe des Arms vertical steht, die Längsaxe des Unterarms nach der Drehung einen Winkel von 30° und die des Oberarms einen von 11° 24′ mit der Verticalen bildet. Durch die Drehung im Schultergelenk wird ja auch der Unterarm mit um 11° 24′ zurückgedreht.

so dass seine Längsaxe hinterher nur einen Winkel von 18° 36′ mit der Verticalen bildet. Dies ist wohl zu berücksichtigen, wenn man sich eine richtige Vorstellung von dem Verhältniss der Richtungsänderungen beider Längsaxen bilden will. Die angeführten Winkelgrössen beziehen sich auf die Drehungen in den beiden Gelenken, nicht aber direct auf die Richtungsänderungen beider Längsaxen. Um die Richtungsänderung der Unterarmlängsaxe in Vergleich mit der der Oberarmlängsaxe zu bringen, hätte man das Verhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' bestimmen sollen. Ohne diese Rechnung auszuführen, kann man aus der Tabelle auf Seite 175 die diesem Verhältniss entsprechenden Werthe der Richtungsänderungen von Oberarmlängsaxe und Unterarmlängsaxe ableiten, indem man immer von dem Drehungswinkel von 30° des Ellbogengelenks den zugehörigen Drehungswinkel des Schultergelenks abzieht oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man die mit dem richtigen Vorzeichen genommenen Drehungswinkel algebraisch summirt. Man erhält dann die folgende Tabelle:

Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Richtungsänderung der Oberarmlängsaxe	−11°24′	−11°20′	−11°11′	−10°55′	−10°28′	−9°52′	−8°58′	−7°43′	−5°56′	−3°34′	−0°40′
Richtungsänderung d. Unterarmlängsaxe	18°36′	18°40′	18°49′	19°5′	19°32′	20°8′	21°2′	22°17′	24°4′	26°26′	29°20′

Um diese Verhältnisse noch deutlicher zu veranschaulichen, ist auf der linken Seite von Tafel VI der Anfang der Bewegung des Armes für verschiedene Ausgangsstellungen aufgezeichnet worden. Die obere Reihe von Bildern entspricht der Beugebewegung, die untere der Streckbewegung im Ellbogengelenk.

Die Ausgangsstellung ist jedesmal dunkel, und die nach 30° Beugung, bezüglich 30° Streckung des Ellbogengelenks erreichte Endstellung des Armes heller gezeichnet worden. Um einen besseren Vergleich der von verschiedenen Beugestellungen des Ellbogengelenks ausgehenden Drehungen zu ermöglichen, ist in allen Fällen die Oberarmlängsaxe in der Ausgangsstellung in dieselbe Richtung gelegt worden.

Aus diesen Bildern ist nun auf den ersten Blick zu ersehen, dass die Drehung im Schultergelenk — gleichgültig ob es sich um

eine Beuge- oder eine Streckbewegung des Ellbogengelenks handelt — um so stärker ausfällt, je näher die Ausgangsstellung der Streckstellung im Ellbogengelenk liegt, und dass bei der Bewegung von der äussersten Beugestellung des Ellbogengelenks aus der Oberarm nahezu fest bleibt. Da von 135° Beugung im Ellbogengelenk aus dem Unterarm höchstens noch eine weitere Beugung von 15° gestattet ist, so findet sich beim letzten Bild der oberen Reihe als Endstellung eine nur um 15° von der Ausgangsstellung im Ellbogengelenk abweichende Haltung verzeichnet. Um aber auch hier unmittelbar einen Vergleich mit den anderen Beugebewegungen zu ermöglichen, ist die, nicht erreichbare, um 30° im Ellbogengelenk abweichende Stellung des Arms punktirt angedeutet worden. Ganz entsprechend findet sich die um 15° über die Streckstellung des Ellbogengelenks hinausgehende Armhaltung im letzten Bilde der unteren Reihe punktirt angedeutet. Bei den Figuren ist angenommen worden, dass die Beugebewegungen durch Contraction des M. brachialis und die Streckbewegungen durch die Contraction der beiden am Oberarm inserirenden Köpfe des M. triceps brachii verursacht werden. Es hätten aber an ihrer Stelle, wie aus den früheren Entwickelungen hervorgeht, ebenso gut irgend welche andere allein zwischen dem Oberarm und dem als starr aufgefassten System Unterarm plus Hand hinziehende, beugend bezüglich streckend wirkende Muskeln eingezeichnet werden können.

Wenn nun auch diese Bilder die den verschiedenen Beugestellungen des Ellenbogengelenks entsprechende Wirkungsweise der inneren Armmuskeln klar legen, so gewähren sie doch noch keinen genügend genauen Einblick in den Verlauf der ganzen zwischen den beiden extremen Armhaltungen verlaufenden Beuge- oder Streckbewegung, welche aus der andauernden Contraction innerer Armmuskeln hervorgeht. Sie würden dies nur dann thun, wenn das Drehungsverhältniss beider Gelenke sich während einer Beugung des Ellbogengelenks von 30° nicht änderte.

Um den ganzen Verlauf der Bewegung angeben zu können, muss man die den verschiedenen Bewegungsphasen entsprechenden Werthe der beiden Drehungswinkel selbst angeben.

Durch Einsetzen der bestimmten Werthe für λ_1^2, λ_2^2, l_1 und c_2 erhält man aus der Relation zwischen φ_1 und ψ auf Seite 172 die

folgende Formel zur Berechnung des Drehungswinkels φ_1 aus der Grösse des Beugungswinkels ψ:

$$\varphi_1 = 0{,}54054 \cdot \operatorname{arctang}\left[0{,}4452 \cdot \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right] - \frac{\psi}{2} + \alpha\,.$$

Nimmt man zunächst den Winkel α, welchen bei der Streckstellung des Ellbogengelenks die Oberarmlängsaxe mit der zum Rumpfe festen Linie $\mathfrak{S}A$ bildet, als Null an, so entsprechen sich unter Anderem folgende Werthe der beiden Drehungswinkel φ_1 und ψ:[1])

φ_1	0°	−5°41′	−11°19′	−16°51′	−22°13′	−27°18′	−32°2′	−36°13′	−39°39′	−42°4′	−43°8′
ψ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°

Vergleicht man diese Werthe mit den Drehungswinkeln in den beiden Gelenken, welche von verschiedenen Beugestellungen des Ellbogengelenks aus unter der Annahme zurückgelegt würden, dass das Drehungsverhältniss für eine Drehung im Ellbogengelenk von 30° constant bliebe (Tabelle auf Seite 175), so erkennt man, dass die Drehungen im Schultergelenk in Wirklichkeit etwas kleiner ausfallen, als es sich bei jener Annahme herausstellte. Von der Streckstellung aus entspricht einer Drehung des Ellbogengelenks von 30° eine Rückwärtsdrehung von nur 11° 19′ im Schultergelenk und nicht von 11° 24′. Der geringe Unterschied von 5 Winkelminuten rührt daher, dass das Drehungsverhältniss eben thatsächlich nicht constant bleibt, sondern bei zunehmender Beugung im Ellbogengelenk allmählich kleiner wird. An Stelle jener Tabelle auf Seite 175 wäre daher die aus der obigen Tabelle durch Subtraction der einzelnen Winkelgrössen abgeleitete genauere Tabelle zu setzen:

Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
Drehung im Ellbogengelenk	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°
Drehung im Schultergelenk	−11°19′	−11°10′	−10°54′	−10°27′	−9°49′	−8°55′	−7°37′	−5°51′	−3°29′

1) Die Curve, welche die Abhängigkeit der beiden Winkel φ_1 und ψ darstellt, ist als unterste Curve auf Tafel VIII verzeichnet worden (vergl. hierzu die Erläuterungen auf Seite 106, Z. 7 ff.).

Die zu den Ausgangsstellungen $\psi = 135^\circ$ und $\psi = 150^\circ$ gehörenden Drehungswinkel lassen sich aus der vorhergehenden Tabelle nicht gewinnen. Die in der früheren Tabelle auf Seite 175 angegebenen Drehungswinkel für diese beiden Ausgangsstellungen können ja auch nur den Zweck haben, eine Vorstellung von dem Verhältniss der Drehungen in den beiden Gelenken zu geben, welches im Anfange der Bewegung von jenen Ausgangsstellungen aus vorhanden ist. Sie sagen aus, dass, wenn von 135° Beugung aus das Drehungsverhältniss constant bliebe, und wenn dem Unterarm gestattet wäre, sich noch um 30° weiter gegen den Oberarm zu drehen, die gleichzeitige Rückwärtsdrehung im Schultergelenk 3° 34′ betragen würde u. s. w.

Um einen Einblick in die Richtungsänderungen zu gewinnen, welche die Unterarmlängsaxe relativ zum Rumpfe erfährt, muss man wiederum die beiden Drehungswinkel der oberen Tabelle auf Seite 178 algebraisch summiren, denn der Unterarm macht ja die Rückwärtsdrehung des Oberarms im Schultergelenk mit. Man erhält dann folgende Tabelle für die früher mit φ_1 und φ_2 bezeichneten Richtungswinkel der beiden Längsaxen in den aufeinander folgenden Bewegungsphasen:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Richtungswinkel (φ_1) f. d. Oberarmlängsaxe	0°	−5°41′	−11°19′	−16°51′	−22°13′	−27°18′	−32°2′	−36°13′	−39°39′	−42°4′	−43°8′
Richtungswinkel (φ_2) f. d. Unterarmlängsaxe	0°	9°19′	18°41′	28°9′	37°47′	47°42′	57°58′	68°47′	80°21′	92°56′	106°52′

Um ein deutliches Bild von dem Ablauf der ganzen Bewegung zwischen den beiden extremen Haltungen des Armes zu gewinnen, sind auf der rechten Seite von Tafel VI (obere Reihe) die einzelnen um 30° Beugung im Ellbogengelenk von einander entfernten Bewegungsphasen zuerst neben einander und dann in ihrer richtigen Lage zu einander aufgezeichnet worden. Jede spätere Bewegungsphase ist etwas heller angedeutet worden als die vorhergehende, so dass man auch in dem letzten Bild rechts die einzelnen Stellungen auseinanderhalten kann. Die Figuren zeigen deutlich, dass, während die Beugung im Ellbogengelenk gleichmässig sich successive um 30° vermehrt, die gleichzeitige Drehung im Schultergelenk immer geringer wird. Könnte die Beugung des Ellbogengelenks noch über die

äusserste Stellung hinaus fortgesetzt werden, so würde einmal der Oberarm einen Augenblick ganz still stehen und schliesslich eine Vorwärtsbewegung ausführen. Dieses letztere Resultat lässt sich zwar nicht aus den obigen Tabellen und aus den Bildern direct erkennen. Man könnte sich aber davon mit Hülfe der auf Seite 178 niedergelegten Relation zwischen φ_1 und ψ überzeugen. Da der Arm durch die Arretirung des Ellbogengelenks bei ca. 150° Beugung an dieser Bewegung gehindert ist, so ist es auch nicht nöthig, auf diese Erscheinung weiter einzugehen.

Bisher war angenommen worden, dass die Oberarmlängsaxe bei der Streckstellung des Ellbogengelenks mit der Geraden $\mathfrak{S}A$ (Figur 6 auf Seite 109) zusammenfällt. Ist dies nicht der Fall, sondern bildet sie in der Streckstellung des Arms den Winkel α mit $\mathfrak{S}A$, welcher bei Vorwärtshaltung des Oberarms positiv und bei Rückwärtshaltung negativ zu rechnen ist, so erhält man die der Bewegung entsprechenden Drehungswinkel φ_1 und ψ, indem man in der oberen Tabelle auf Seite 178 die Winkel φ_1 um α vergrössert, dagegen ψ unverändert lässt. Man erhält dagegen die Werthe der Richtungswinkel φ_1 und φ_2, indem man in der Tabelle auf Seite 179 beide Winkel, sowohl φ_1 wie φ_2, um α vergrössert.

Die durch die angeführten Tabellen festgelegten Bewegungsphasen gelten nun nicht nur für die Beugebewegung, sondern auch für die Streckbewegung, welche der Arm unter alleiniger Wirkung innerer Armmuskeln ausführt. Es folgen sich dieselben nur dann in umgekehrter Reihenfolge.

Man könnte daher die Bilder der oberen Reihe auf Tafel VI auch direct als eine Darstellung der Streckbewegung auffassen, wenn man sie von rechts nach links aufeinander folgen lässt. Jede folgende Bewegungsphase ist dann dunkler gezeichnet als die vorhergehende. Dabei würde in der Ausgangsstellung, bei welcher jetzt das Ellbogengelenk sich in der extremsten Beugestellung befindet, die Oberarmlängsaxe nach rückwärts um einen Winkel von 43° 8′ von der Geraden $\mathfrak{S}A$ abstehen. In der Endstellung, bei welcher das Ellbogengelenk gestreckt ist, würde dagegen die Oberarmlängsaxe mit $\mathfrak{S}A$ zusammenfallen, so dass also auch in diesem Falle α den Werth Null besitzt.

Untersucht man die Streckbewegung, bei welcher in der Aus-

gangsstellung (extreme Beugestellung des Ellbogengelenks) die Oberarmlängsaxe mit $\mathfrak{S}A$ zusammenfällt, so wird nun in der Endstellung die Oberarmlängsaxe um den Winkel von 43° 8′ vorwärts gedreht erscheinen. Da die Endstellung mit der Streckung des Ellbogengelenks zusammenfällt, so wäre in diesem Falle der Winkel α nicht Null, sondern 43° 8′ anzunehmen. Man erhält daher aus der früheren Tabelle für die Drehungswinkel φ_1 und ψ (Seite 178) die diesem Falle entsprechende, indem man alle φ_1 um 43° 8′ vermehrt und beide Winkel in umgekehrter Reihenfolge schreibt, also:

φ_1	0°	+1°4′	+3°29′	+6°55′	+11°6′	+15°50′	+20°55′	+26°17′	+31°49′	+37°27′	+43°8′
ψ	150°	135°	120°	105°	90°	75°	60°	45°	30°	15°	0°

Die Tabelle auf Seite 179 geht dagegen über in die folgende:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk, ψ =	150°	135°	120°	105°	90°	75°	60°	45°	30°	15°	0°
Richtungswinkel (φ_1) f. d. Oberarmlängsaxe	0°	+1°4′	+3°29′	+6°55′	+11°6′	+15°50′	+20°55′	+26°17′	+31°49′	+37°27′	+43°8′
Richtungswinkel (φ_2) f. d. Unterarmlängsaxe	150°	136°4′	123°29′	111°55′	101°6°	90°50′	80°55′	71°17′	61°49′	52°27′	43°8′

Mit Hülfe dieser beiden Tabellen sind die Bilder der unteren Reihe auf Tafel VI gezeichnet worden. Auch hier findet sich jede folgende Bewegungsphase heller gezeichnet als die vorhergehende. Während bei der Beugebewegung entsprechend der gleichmässigen Beugung im Ellbogengelenk die Rückwärtsdrehung im Schultergelenk an Grösse allmählich abnahm, findet das umgekehrte Verhalten bei der Streckbewegung statt, wie man deutlich aus den Bildern erkennt. Bei gleichmässiger Streckung des Ellbogengelenks aus der extremen Beugestellung um je 30° wird das Schultergelenk im Anfang nur wenig, im Verlaufe der Streckbewegung immer mehr, und zuletzt sehr stark nach vorn gedreht.

Wenn auch die beiden Bilderreihen auf Tafel VI zunächst nur den Fall veranschaulichen sollen, dass die Beugung oder Streckung des Arms aus der einen extremen Stellung bis zu der anderen stetig fortgesetzt wird, so können diese Figuren doch auch dazu dienen, jedes beliebige Stück einer solchen Bewegung anschaulich

zu machen. Will man sich z. B. eine klare Vorstellung von der Beugebewegung zwischen 30° und 120° Beugungswinkel verschaffen, so hat man in der ersten Reihe nur die beiden äussersten Stellungen fortzulassen. Oder will man wissen, in welcher Weise sich der Arm aus der rechtwinkligen Beugestellung bis zu der äussersten Streckstellung bewegt, so hat man in der unteren Bilderreihe nur die beiden ersten Bewegungsphasen unberücksichtigt zu lassen, um eine deutliche Anschauung dieser Streckbewegung zu erhalten. Die Stellung, welche dabei der Oberarm zu Anfang gegen den Rumpf einnimmt, hat auf den Verlauf der Bewegungen unter den gemachten Voraussetzungen gar keinen Einfluss.

Aus den vorstehenden Entwickelungen ergab sich mit voller Strenge, dass das Verhältniss der Bewegungen im Schulter- und Ellbogengelenk in keiner Weise von der Muskelspannung und von der Lage der Insertionsstellen beeinflusst wird, so lange nur Muskeln thätig sind, welche am Oberarm ihren Ursprung und an dem als starr angenommenen System Unterarm plus Hand ihren Ansatz nehmen, und so lange keine äusseren Kräfte, wie die Schwere, auf den Arm einwirken. Das Drehungsverhältniss ist unter diesen Voraussetzungen ausschliesslich abhängig von dem Massenverhältniss der beiden Armabschnitte, von der Lage der Schwerpunkte und der Vertheilung der Massen innerhalb der einzelnen Theile, welche in den Werthen der Trägheitsmomente, bezüglich Trägheitsradien zum Ausdruck kommt. Daraus geht nun hervor, dass das Verhältniss der Gelenkbewegungen sich im Allgemeinen ändern wird, wenn das Massenverhältniss und die Massenvertheilung anders werden. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn wir einen schweren Körper in der Hand halten, und nun die Muskeln bei ihrer Contraction die Masse dieses Körpers mit in Bewegung zu setzen haben. Dadurch wird nicht allein die Masse des starren Systems Unterarm plus Hand vergrössert, sondern es rückt der Schwerpunkt von Unterarm plus Hand vom Ellbogengelenk fort, es verschieben sich die Hauptpunkte der beiden Armabschnitte in derselben Richtung, und es ändern sich die Trägheitsradien der beiden reducirten Systeme, kurz: die Muskeln wirken jetzt auf ein Massensystem ein, welches durchweg verschieden ist von dem System, das der unbelastete Arm darstellt.

Man kann nun die Bewegungen, welche unter diesen veränderten Verhältnissen eintreten, aus den Bewegungen des unbelasteten Armes ableiten, ohne dass man genöthigt wäre, für diesen Fall von Neuem den Werth der lebendigen Kraft und die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Man hat sich nur darüber Rechenschaft zu geben, in welcher Weise die Grössen λ_1^2, λ_2^2 und c_2, welche allein unter den die Bewegung bestimmenden Strecken von der Massenvertheilung abhängen, durch den Hinzutritt der neuen Masse geändert werden.

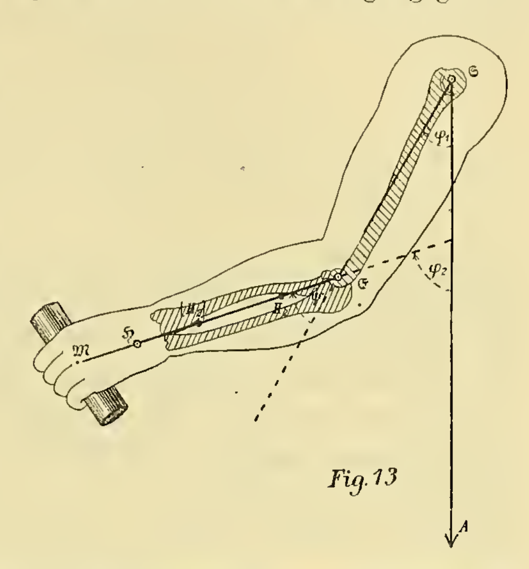


Fig. 13

Der Schwerpunkt 𝔐 der in der Hand gehaltenen Masse von der Grösse M liege, wie der Einfachheit halber angenommen werden mag, in der Verlängerung der Längsaxe 𝔈𝔖 des Unterarms (Fig. 13). Seine Entfernung vom Mittelpunkt 𝔈 des Ellbogengelenks sei a.

Das Trägheitsmoment des reducirten Oberarmsystems wird durch den Hinzutritt der Masse M um die Grösse Ml_1^2 vermehrt; denn für dieses reducirte System hat man sich ja die ganze Masse des starren Systems Unterarm plus Hand im Punkte 𝔈 des Ellbogengelenks concentrirt zu denken.

Das Trägheitsmoment des reducirten Unterarmsystems wird dagegen um Ma^2 vermehrt.

Umgiebt man zum Unterschied die neuen Werthe der Quadrate der zugehörigen Trägheitsradien λ_1, λ_2 mit eckigen Klammern, und beachtet man, dass die Massen der reducirten Systeme um die Masse M vergrössert worden sind, so stellen demnach $(m_0 + M)\cdot[\lambda_1^2]$ und $(m_0 + M)\cdot[\lambda_2^2]$ die Werthe der beiden Trägheitsmomente dar, und man hat nach den obigen Auseinandersetzungen:

$$(m_0 + M)\cdot[\lambda_1^2] = m_0\lambda_1^2 + Ml_1^2$$

$$(m_0 + M)\cdot[\lambda_2^2] = m_0\lambda_2^2 + Ma^2\,.$$

Daraus geht hervor, dass die Quadrate der neuen Trägheitsradien sich aus den Quadraten der zum unbelasteten Arm gehörenden Trägheitsradien und den Grössen l_1^2, a^2, m_0 und M mit Hülfe folgender Formeln berechnen lassen:

$$[\lambda_1^2] = \frac{m_0}{m_0 + M} \cdot \lambda_1^2 + \frac{M}{m_0 + M} \cdot l_1^2$$

$$[\lambda_2^2] = \frac{m_0}{m_0 + M} \cdot \lambda_2^2 + \frac{M}{m_0 + M} \cdot a^2 .$$

Die Grösse c_2 stellte die Entfernung des Hauptpunktes H_2 des unbelasteten starren Systems Unterarm plus Hand vom Punkte $\mathfrak{E}$ des Ellbogengelenks dar. Dieser Hauptpunkt war der Schwerpunkt des Massensystems, welches man erhält, wenn man zu der Masse von Unterarm plus Hand die im Punkte $\mathfrak{E}$ concentrirt gedachte Masse des Oberarms hinzufügt. Durch den Hinzutritt der Masse M im Punkte $\mathfrak{M}$ der Unterarmlängsaxe (Figur 13) wird sich dieser Schwerpunkt nach $\mathfrak{M}$ zu verschieben. Der neue Hauptpunkt $[H_2]$, welcher mit diesem neuen Schwerpunkt zusammenfällt, liegt dann auf der Verbindungsstrecke $H_2\mathfrak{M}$ (Strecke auf der Unterarmlängsaxe) und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältniss der Massen m_0 und M. Bezeichnet man mit $[c_2]$ die neue Hauptstrecke, d. h. die Entfernung des neuen Hauptpunktes $[H_2]$ von $\mathfrak{E}$, so wird nach einem schon mehrfach verwendeten Satze zwischen $[c_2]$, den Strecken c_2 und a und den Massen m_0 und M die Beziehung bestehen müssen:

$$(m_0 + M) \cdot [c_2] = m_0 \cdot c_2 + Ma .$$

Daher hat man zur Berechnung der neuen Hauptstrecke $[c_2]$ die Formel:

$$[c_2] = \frac{m_0}{m_0 + M} \cdot c_2 + \frac{M}{m_0 + M} a .$$

Setzt man die mit Hülfe dieser Formeln berechneten Grössen $[\lambda_1^2]$, $[\lambda_2^2]$, $[c_2]$ an Stelle der zum unbelasteten Arm gehörenden Grössen λ_1^2, λ_2^2 und c_2 in die auf Seite 160 niedergelegten Bewegungsgleichungen, in den auf Seite 164 angegebenen Ausdruck für das Verhältniss der Drehungen zu Anfang der Muskelcontraction und in die Beziehung zwischen den beiden Drehungswinkeln

φ_1 und ψ auf Seite 172 ein, so erhält man die Bewegungsgleichungen, das Drehungsverhältniss und die Gleichungen zwischen φ_1 und ψ für den um die in der Hand gehaltene Masse M beschwerten Arm.

Als Entfernung a des Schwerpunktes $\mathfrak{M}$ der in der Hand gehaltenen Masse vom Punkt $\mathfrak{E}$ des Ellbogengelenks hatte sich bei dem in Betracht gezogenen Präparat 34,6 cm ergeben.

Um nur einen speciellen Fall genauer zu untersuchen, sei angenommen, dass die Masse M des in der Hand gehaltenen Körpers 15000 g betrage, eine Masse, bei welcher man vielleicht gerade noch den horizontal ausgestreckten Arm beugen, oder den gebeugten Arm in horizontaler Ebene strecken kann, zumal wenn der Arm von den Dimensionen ist und so grosse Muskelmassen besitzt, als dem in Betracht gezogenen Präparate entsprechen.

Für $a = 34{,}6$ und $M = 15000$ erhält man nun in Anbetracht der für den unbelasteten Arm gefundenen Grössen $\lambda_1^2 = 581{,}19$; $\lambda_2^2 = 248{,}08$; $l_1 = 30{,}3$; $c_2 = 9{,}16$ (Seite 135) unter Benutzung der Formeln auf Seite 184 die Werthe:

$$[\lambda_1^2] = 851{,}65\,; \quad [\lambda_2^2] = 1010{,}08 \quad \text{und} \quad [c_2] = 29{,}58\,,$$

während l_1 natürlich seinen Werth 30,3 nicht geändert hat.

Man erhält daher nach der Formel auf Seite 164 als Verhältniss der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk zu Anfang der Contraction eines inneren Armmuskels aus der Ruhe den von der anfänglichen Beugestellung des Ellbogengelenks abhängigen Werth:

$$-\frac{1{,}127 + \cos\psi}{2{,}077 + 2\cos\psi}.$$

Wiederholt man die an den entsprechenden Werth für den unbelasteten Arm auf Seite 173 geknüpften Betrachtungen, so erkennt man leicht, dass hier weder der Fall eintreten kann, dass bei einer bestimmten Ausgangsstellung des Armes allein Bewegung im Schultergelenk, noch der Fall, dass allein eine solche im Ellbogengelenk eintritt.

Die Berechnung für verschiedene um 15° Beugung im Ellbogengelenk von einander abweichende Ausgangsstellungen ergiebt folgende, der Tabelle auf Seite 174 entsprechende, Tabelle:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Verhältniss der Drehungen im Schulter- u. Ellbogengelenk zu Anfang der Muskelcontraction aus der Ruhe	−0,522	−0,522	−0,523	−0,525	−0,529	−0,534	−0,543	−0,557	−0,582	−0,633	−0,757

Da alle Drehungsverhältnisse negative Werthe besitzen, so gehen auch bei Belastung des Armes die beiden Gelenkbewegungen stets in entgegengesetztem Drehungssinne vor sich. Es stellt sich aber nun gegenüber dem Falle des unbelasteten Armes (vergleiche die Tabelle auf Seite 174) insofern ein grosser Unterschied heraus, als bei jenem die Werthe des Drehungsverhältnisses, abgesehen vom Vorzeichen, immer kleiner wurden, während hier gerade das Umgekehrte stattfindet. Das Drehungsverhältniss ändert sich zwar nur langsam, aber es nimmt doch mit grösserem Beugungswinkel stetig zu. Denn auch die zu 0° und 15° Beugungswinkel gehörenden Werthe sind nicht, wie es nach der Tabelle den Anschein hat, genau gleich, sondern das zweite ist grösser wie das erste. Der Unterschied zeigt sich aber erst in den späteren Decimalstellen.

Während im früheren Falle die absoluten Werthe sämmtlicher Drehungsverhältnisse kleiner wie 0,5 waren, sind sie jetzt alle grösser wie 0,5. Wäre das Verhältniss genau gleich 0,5, so würde die Beugung im Ellbogengelenk doppelt so gross sein wie die Drehung im Schultergelenk. Da der Unterarm die letztere Drehung mitmachen muss, so würde demnach die Richtungsänderung für beide Längsaxen die gleiche sein, abgesehen davon, dass sich der Oberarm nach rückwärts und der Unterarm nach vorn dreht. Da der absolute Werth des Verhältnisses aber jetzt durchweg grösser wie 0,5 ausfällt, so geht daraus hervor, dass die Richtungsänderung der Oberarmlängsaxe von jeder Armhaltung aus grösser ist, als die Richtungsänderung der Unterarmlängsaxe.

Man kann sich nun durch Einsetzen verschiedener Werthe für die in der Hand gehaltene Masse M in die Formeln auf Seite 184 und durch Berechnung des entsprechenden Drehungsverhältnisses nach Seite 164 davon überzeugen, dass der absolute Werth des Drehungsverhältnisses für jede Ausgangsstellung des Armes um so

grösser wird, je grösser die Masse M ist. Es wird daher für eine Masse, welche kleiner als 15000 g ist, einmal der Fall eintreten, dass das Drehungsverhältniss für eine bestimmte Ausgangsstellung, etwa die Streckstellung des Armes, genau gleich — 0,5 ist. Tritt dies ein, so werden die Richtungen der Längsaxen von Oberarm und Unterarm im Anfang der Contraction des Muskels um denselben Winkel geändert. Man kann die Grösse der in der Hand gehaltenen Masse, bei welcher dies stattfindet, leicht bestimmen, wenn man den unbestimmten Ausdruck für das Drehungsverhältniss auf Seite 164 zu Hülfe nimmt. Da das letztere den Werth — 0,5 annehmen soll, so hat man bei der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$-\frac{[\lambda_2^2] + l_1[c_2]\cos\psi}{[\lambda_1^2] + [\lambda_2^2] + 2l_1[c_2]\cdot\cos\psi} = -0,5\,.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Nenner des Quotienten auf der linken Seite, so erkennt man leicht, dass die Glieder mit dem Factor $\cos\psi$ sich gegenseitig fortheben, und dass diese Bedingungsgleichung sich in der einfachen Form darstellen lässt:

$$[\lambda_1^2] = [\lambda_2^2]\,.$$

Es ergiebt sich hieraus das Resultat, dass in dem Falle, in welchem durch die in der Hand gehaltene Masse die Trägheitsradien und damit die Trägheitsmomente der beiden reducirten Systeme in Bezug auf die Axen im Schultergelenk bezüglich Ellbogengelenk einander gleich gemacht worden sind, beide Armabschnitte die gleichen Richtungsänderungen erfahren. Da der Beugungswinkel gar nicht mehr in der Bedingungsgleichung auftritt, so folgt ferner, dass unter dieser Voraussetzung Gleichheit der Richtungsänderungen für jede Armhaltung stattfindet. Hieraus ist endlich zu schliessen, dass dann für den ganzen Verlauf der Beugebewegung oder Streckbewegung des Arms von der Ruhe aus die in einer bestimmten Zeit erfolgte Drehung des Oberarms nach hinten gleich der in derselben Zeit stattgefundenen Drehung des Unterarms (relativ zum Rumpfe) nach vorn ist.

Die Masse, bei welcher diese bemerkenswerthe Bewegungsart eintritt, lässt sich leicht bestimmen mit Hülfe der auf Seite 184 niedergelegten Werthe für $[\lambda_1^2]$ und $[\lambda_2^2]$. Es ergiebt sich nämlich die der

Bedingung der Gleichheit der beiden Grössen entsprechende Bestimmungsgleichung für M:

$$m_0 \lambda_1^2 + M \cdot l_1^2 = m_0 \lambda_2^2 + M \cdot a^2 .$$

Aus derselben folgt

$$M = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{a^2 - l_1^2} m_0 .$$

Hierbei sind natürlich unter λ_1^2 und λ_2^2 die zum unbelasteten Arme gehörenden Grössen zu verstehen. Da $\lambda_1^2 = 581,19$; $\lambda_2^2 = 248,08$; $a = 34,6$ und $l_1 = 30,3$; $m_0 = 3683$, so erhält man als Werth für die Masse M 4395 g.

Wenn also ein Individuum, dessen Arm die gleichen Dimensionen und Massen und die gleiche Massenvertheilung besitzt, wie das in Betracht gezogene Präparat, eine Masse von abgerundet 4,4 kg in der Hand hält, so würde dasselbe durch alleinige Contraction von Beuge- oder Streckmuskeln des Arms, welche ihren Ursprung am Oberarm haben, in horizontaler Bewegung den Arm nur so beugen oder strecken können, dass der Oberarm sich immer um denselben Winkel nach rückwärts dreht wie der Unterarm nach vorn. Auf der linken Seite von Tafel VII ist diese Bewegungsart in der schon auf der rechten Seite von Tafel VI angewendeten Weise anschaulich dargestellt. Die obere Bilderreihe versinnlicht die Beugung, die untere die Streckung des Armes. Der kleine Kreis, welcher sich in einiger Entfernung vom unteren Ulna-Ende befindet, deutet die Lage und Bewegung der in der Hand gehalten Masse an. —

Das oben angedeutete Wachsthum des absoluten Werthes des Drehungsverhältnisses bei zunehmender Grösse der in der Hand gehaltenen Masse geht nun nicht über alle Grenzen hinaus. Denkt man sich einmal die Masse M so gross, dass die Masse m_0 des Arms im Vergleich zu ihr verschwindend klein erscheint — ein Fall, der in Wirklichkeit natürlich nicht eintreten kann —, so würde der Werth des Massenverhältnisses $\frac{m_0}{m_0 + M}$ gleich Null und der Werth des Massenverhältnisses $\frac{M}{m_0 + M}$ gleich 1 sein. Es würden dann die Grössen $[\lambda_1^2]$, $[\lambda_2^2]$ und $[c_2]$ nach Seite 184 die speciellen Werthe annehmen: $[\lambda_1^2] = l_1^2$; $[\lambda_2^2] = a^2$ und $[c_2] = a$.

Das Verhältniss der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk würde dann in der Form auftreten:

$$\frac{a^2 + l_1 a \cos \psi}{l_1^2 + a^2 + 2 l_1 a \cos \psi}.$$

Da $a = 34{,}6$ und $l_1 = 30{,}3$, so würde z. B. für $\psi = 0$ (Streckstellung) sich der Werth $-0{,}533$ und für $\psi = 90^\circ$ (rechtwinklige Beugestellung) sich der Werth $-0{,}566$ einstellen. Ueber diese Werthe kann das Drehungsverhältniss für die beiden Stellungen nicht hinausgehen. Vergleicht man dieselben mit den entsprechenden in der Tabelle auf Seite 186, so erkennt man, dass man mit einer Masse von 15 kg den Verhältnissen schon sehr nahe gekommen ist, welche eintreten, wenn man die zu bewegende Masse M über alle Grenzen steigert. Es werden sich daher die Bewegungen, welche bei Massen eintreten, die schwerer wie 15 kg sind, nicht sehr von den zu $M = 15$ kg gehörenden unterscheiden. —

Kehren wir nach diesem Ausblick auf den äussersten Grenzfall zurück zu der Tabelle auf Seite 186. Aus derselben lässt sich nun wieder ohne Mühe ableiten, wie gross die einer Beugung oder Streckung des Ellbogengelenks von 30° entsprechende Drehung im Schultergelenk ausfallen würde, wenn das Drehungsverhältniss während dieser Bewegung constant bliebe. Es ergeben sich für die verschiedenen Ausgangsstellungen folgende Resultate:

Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Drehung im Ellbogengelenk	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°
Drehung im Schultergelenk	−15°40′	−15°40′	−15°41′	−15°45′	−15°52′	−16°1′	−16°17′	−16°43′	−17°28′	−18°59′	−22°43

Diese Tabelle entspricht der Tabelle auf Seite 175, welche sich auf den Fall des unbelasteten Arms bezieht. Aus derselben leitet man durch Subtraction die Grössen für die gleichzeitigen Richtungsänderungen von Oberarmlängsaxe und Unterarmlängsaxe ab und erhält dann die folgende, der Tabelle auf Seite 176 entsprechende Tabelle:

Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, $\psi =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Richtungsänderung der Oberarmlängsaxe	−15°40′	−15°40′	−15°41′	−15°45′	−15°52′	−16°1′	−16°17′	−16°43′	−17°28′	−18°59′	−22°43′
Richtungsänderung der Unterarmlängsaxe	14°20′	14°20′	14°19′	14°15′	14°8′	13°59′	13°43′	13°17′	12°32′	11°1′	7°17′

Aus derselben ist das schon früher angedeutete Resultat deutlich zu erkennen, dass bei einer Belastung der Hand von 15 kg der Oberarm stets mehr nach rückwärts gedreht wird, als der Unterarm nach vorn. Allgemein zeigt sich dies Verhalten, sobald die in der Hand gehaltene Last bei den in Betracht gezogenen Dimensionen des Armes grösser als abgerundet 4,4 kg ist.

Da in dem vorliegenden Falle das Drehungsverhältniss im Ganzen sich nur wenig ändert, so begeht man keinen grossen Fehler, wenn man die in den vorigen beiden Tabellen niedergelegten Winkelgrössen direct als die Drehungswinkel bezüglich als Theile der Drehungswinkel auffasst, trotzdem sie ja nur unter der Voraussetzung mit diesen identisch wären, dass das Drehungsverhältniss während der Beugung oder Streckung des Armes um 30° absolut constant bliebe. Will man die genauen Werthe der Drehungswinkel erhalten, so muss man wiederum zu der Beziehung zwischen φ_1 und ψ seine Zuflucht nehmen, welche sich auf Seite 172 in unbestimmter Form vorfindet. Setzt man in dieselbe die gefundenen Werthe $[\lambda_1^2] = 851,65$; $[\lambda_2^2] = 1010,08$; $l_1 = 30,3$ und $[c_2] = 29,58$ ein, so erhält man:

$$\varphi_1 = -0,31566 \cdot \operatorname{arctang}\left[0,13734 \cdot \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right] - \frac{\psi}{2} + \alpha .$$

Nimmt man, wie früher, zunächst den Winkel α, welchen bei der Streckstellung des Arms die Oberarmlängsaxe mit der festen Linie $\mathfrak{S}A$ bildet, als Null an, so erhält man aus dieser Formel die folgenden sich entsprechenden Werthe von φ_1 und ψ:

φ_1	0°	−7°50′	−15°40′	−23°32′	−31°26′	−39°24′	−47°28′	−55°42′	−64°13′	−73°17′	−83°34′
ψ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°

Vergleicht man die 30° Beugung oder Streckung des Ellbogengelenks entsprechenden Zunahmen oder Abnahmen der absoluten Werthe von φ_1 mit den Werthen der unteren Reihe in der Tabelle auf

Seite 189, so zeigt sich, dass die jetzt gefundenen genauen Werthe von φ_1 durchweg etwas grösser ausfallen, als man nach der früheren Tabelle erwarten müsste. Dies ist eine Folge davon, dass der Werth des Drehungsverhältnisses mit wachsender Beugung des Armes wächst. An Stelle der Tabelle auf Seite 189 wäre daher die folgende genauere zu setzen, welche der unteren Tabelle auf Seite 178 entspricht:

Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
Drehung im Ellbogengelenk	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°	30°
Drehung im Schultergelenk	−15°40′	−15°42′	−15°46′	−15°52′	−16°2′	−16°18′	−16°45′	−17°35′	−19°21′

Durch algebraische Summation der in der vorletzten Tabelle niedergelegten Werthe von φ_1 und ψ erhält man endlich die folgenden Werthe der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 für die Längsaxen der beiden Armabschnitte:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk, ψ =	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
Richtungswinkel (φ_1) f. d. Oberarmlängsaxe	0°	−7°50′	−15°40′	−23°32′	−31°26′	−39°24′	−47°28′	−55°42′	−64°13′	−73°17′	−83°34′
Richtungswinkel (φ_2) f. d. Unterarmlängsaxe	0°	7°10′	14°20′	21°28′	28°34′	35°36′	42°32′	49°18′	55°47′	61°43′	66°26′

Während diese Tabelle der auf Seite 179 entspricht, erhält man die der unteren Tabelle auf Seite 181 entsprechende, indem man $\alpha = 83^\circ\ 34'$ annimmt und die einzelnen Winkel in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Es ergiebt sich dann:

Beugungswinkel im Ellbogengelenk, ψ =	150°	135°	120°	105°	90°	75°	60°	45°	30°	15°	0°
Richtungswinkel (φ_1) f. d. Oberarmlängsaxe	0°	+10°17′	+19°21′	+27°52′	+36°6′	+44°10′	+52°8′	+60°2′	+67°54′	+75°44′	+83°34′
Richtungswinkel (φ_2) f. d. Unterarmlängsaxe	150°	145°17′	139°21′	132°52′	126°6′	119°10′	112°8′	105°2′	97°54′	90°44′	83°34′

Die erstere dieser beiden Tabellen legt aufeinanderfolgende Bewegungsphasen der Beugebewegung, die letztere solche der Streckbewegung des Armes fest. Mit Hülfe derselben sind die beiden Bilderreihen auf der rechten Seite von Tafel VII entworfen worden, welche den Bewegungsvorgang des mit 15 kg belasteten Armes in

derselben Weise veranschaulichen sollen, wie die Bilder auf der linken Seite von Tafel VII denselben bei einer Belastung von nur 4,4 kg, und die Bilder auf der rechten Seite von Tafel VI die Bewegung des unbelasteten Arms.

Aus diesen Bildern, in welchen die in der Hand gehaltene Last wiederum durch einen in der richtigen Entfernung vom unteren Ulna-Ende gezeichneten Kreis angedeutet ist, kann man deutlich erkennen, dass bei 15 kg Belastung die Bewegung nahezu so vor sich geht, dass der Schwerpunkt der in der Hand gehaltenen Masse sich auf einer geraden Linie dem Schultergelenk nähert (Beugebewegung) oder sich auf einer geraden Linie von demselben entfernt (Streckbewegung). Genau genommen ist die Bahn dieses Punktes eine sehr wenig gekrümmte Linie, welche ihre concave Seite dem Ellbogengelenk zukehrt. Würde dagegen die in der Hand gehaltene Masse so gross sein, dass im Vergleich zu ihr die Masse des Armes gar nicht in Betracht käme, so würde ihr Schwerpunkt bei der Bewegung des Armes genau eine gerade Linie beschreiben.

Von dieser Thatsache kann man sich leicht überzeugen, wenn man beachtet, dass in dem letzteren Falle $[\lambda_1^2] = l_1^2$; $[\lambda_2^2] = a^2$ und $[c_2] = a$ wird (vergleiche Seite 188). Setzt man diese Werthe in die Relation zwischen φ_1 und ψ auf Seite 172 ein, so geht dieselbe in die einfache Form über:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctang}\left\{\frac{a - l_1}{a + l_1} \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right\} - \frac{\psi}{2} + \alpha .$$

Nimmt man der Einfachheit halber wieder den Winkel α, welcher auf die Bewegung selbst gar keinen Einfluss ausübt, gleich Null an, so lässt sich diese Beziehung auch in der Form schreiben:

$$\frac{\operatorname{tang}\left[\varphi_1 + \frac{\psi}{2}\right]}{\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}} = \frac{a - l_1}{a + l_1} .$$

Daraus erkennt man aber, unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen den drei Winkeln φ_1, φ_2 und ψ, dass l_1 und a für alle Bewegungsphasen die Seiten eines Dreiecks darstellen, dessen gegenüberliegende Winkel φ_2 und $-\varphi_1$ sind. Dies ist nur möglich, wenn sich der Endpunkt der Strecke a stets auf der Linie $\mathfrak{S}A$ befindet.

Rückblick.

Die vorliegende Untersuchung hat sowohl auf empirischem als auf theoretischem Wege den Beweis erbracht, dass die Muskeln im allgemeinen auch auf Gelenke wirken, über welche sie gar nicht hinwegziehen. So bringen die Muskeln, welche am Oberarm ihren Ursprung nehmen, bei ihrer Contraction Bewegung im Schultergelenk hervor, die über das Handgelenk hinwegziehenden Muskeln mit dem Ursprung am Unterarm wirken auch auf das Ellbogengelenk, die an der Handwurzel und an den Mittelhandknochen entspringenden Muskeln bewegen auch das Handgelenk, über welches sie gar nicht hinwegziehen, die vom Oberschenkel in distaler Richtung ausgehenden Muskeln wirken auf das Hüftgelenk, sowohl die vom Unterschenkel nach dem Fuss ziehenden als auch die zwischen Becken und Oberschenkel sich erstreckenden Muskeln bewegen das Kniegelenk u. s. w.

Da die Wirkung der Muskeln auf Gelenke, über welche sie nicht hinwegziehen, bisher noch nicht zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht worden ist, so war es nöthig, zunächst den einfachsten Fall zu behandeln, nämlich den Fall eines nur über ein einziges Gelenk hinwegziehenden Muskels.

Es zeigt sich ganz allgemein, dass ein eingelenkiger Muskel in einem Nachbargelenk in der Regel die entgegengesetzte Drehung hervorruft als in dem Gelenk, welches zwischen seinen Insertionspunkten liegt. Ein eingelenkiger Beuger des Ellbogengelenks streckt demnach gleichzeitig das Schultergelenk, d. h. er dreht den Oberarm um eine der Ellbogenaxe parallele Axe im Schultergelenk nach rückwärts, und umgekehrt wirkt ein eingelenkiger Streckmuskel des Ellbogengelenks beugend auf das Schultergelenk ein. In entsprechen-

der Weise wird ein eingelenkiger Beuger oder Strecker des Kniegelenks das Hüftgelenk strecken oder beugen, ferner wird ein allein über das Fussgelenk hinwegziehender Muskel, welcher im Fussgelenk Dorsal- oder Plantarflexion hervorbringt, auf das Kniegelenk beugend oder streckend einwirken; es wird weiterhin ein eingelenkiger Fingerstrecker zugleich Handbeuger und ein eingelenkiger Fingerbeuger zugleich Handstrecker sein u. s. w.

Diese Thatsachen liessen sich zum Theil durch locale Muskelfaradisation am Lebenden prüfen (vergl. Seite 108). In gewissem Zusammenhang mit denselben scheinen mir auch Beobachtungen am Lebenden zu stehen, welche Heinrich Ewald Hering[1]) in einer vor Kurzem erschienenen Schrift über die gleichzeitige Thätigkeit antagonistisch wirkender Muskeln anführt. Er sagt (a. a. O. Seite 12):

»Man kann sich leicht überzeugen, dass bei der Beugung der Hand der Unterarm im Allgemeinen eine der Bewegungsrichtung der Hand entgegengesetzte Bewegung macht. Wird z. B. der Unterarm und die Hand (mit der Vola nach unten) horizontal gehalten, so führt das distale Ende des Unterarms eine deutliche Aufwärtsbewegung aus, während die Hand gebeugt wird. Oder wird dabei die Hand vertical (mit nach oben gewendetem Daumen) gehalten, so bewegt sich bei Beugung derselben das distale Ende des Unterarms vom Rumpf weg.«

»Diesem Fall ist jener anzureihen, wo bei der Beugung der Finger, z. B. zur Faustbildung, die Mittelhand sich in entgegengesetzter Richtung bewegt.«

»Ein weiterer Fall ist der, dass bei der Beugung der zwei letzten Phalangen die erste sich in entgegengesetzter Richtung bewegt.«

»Umgekehrt erfolgt bei Streckung der Hand oder der Finger eine entgegengesetzte Bewegung des Unterarmes beziehungsweise der Mittelhand. Auch bei Streckung und Beugung des Vorderarmes erfolgen gleichzeitig entgegengesetzte Bewegungen des Oberarmes.«

»Darnach scheint es ein Gesetz zu sein, dass bei der Bewegung eines zwanglos gehaltenen Gliedes der oberen Extremität das sich

---

1) Beitrag zur Frage der gleichzeitigen Thätigkeit antagonistisch wirkender Muskeln von Dr. Heinrich Ewald Hering. Zeitschrift für Heilkunde XVI Bd. 1895.

proximal anschliessende Glied im Allgemeinen eine der ersteren entgegengesetzte Bewegung ausführt.«

Würden wir nur eingelenkige Muskeln haben, so wäre das Vorhandensein dieses Gesetzes leicht zu verstehen. Es würde diese Art der Bewegung dann die einfachste darstellen, da zur Hervorbringung derselben die Contraction eines einzigen Muskels ausreichte, und dieselbe nicht nothwendig von der synergischen Contraction anderer Muskeln begleitet zu sein brauchte. Dagegen würden zum Beispiel die einfache Beugung oder Streckung des Unterarms bei ruhendem Oberarm, oder die Fingerbeugung beziehungweise Fingerstreckung ohne Drehung im Handgelenk, vom Standpunkte der Muskeldynamik aus als viel complicirtere Bewegungsvorgänge anzusehen sein: denn zur Hervorbringung derselben genügte die Contraction eines einzigen Muskels nicht; es müssten gleichzeitig andere Muskeln wirksam sein, um den Oberarm beziehungsweise das Schultergelenk in dem einen Falle und das Handgelenk in dem andern Falle festzustellen.

So einfach sind nun freilich am menschlichen Organismus die Verhältnisse nicht, wie sie sich bei alleinigem Vorhandensein eingelenkiger Muskeln darstellen würden. Der grösste Teil aller Muskeln zieht über mehrere Gelenke hinweg. Für die mehrgelenkigen Muskeln gelten aber die bei der vorliegenden Untersuchung gefundenen Resultate nicht ohne Weiteres, wie in einem späteren Teile der mit dieser Untersuchung beginnenden Reihe von »Beiträgen zu einer Muskeldynamik« ausführlich auseinandergesetzt werden soll. Immerhin werden aber manche bei den eingelenkigen Muskeln vorgefundenen Erscheinungen sich auch in gewissem Grade bei mehrgelenkigen Muskeln einstellen. So lässt sich beispielsweise schon jetzt voraussagen, dass die über Ellbogengelenk und Radio-Ulnargelenk hinwegziehenden Mm. brachioradialis und pronator teres in ganz ähnlicher Weise auf das Schultergelenk einwirken werden wie der Brachialis. Es ist daher nicht undenkbar, dass das von Hering vermuthete Bewegungsgesetz wichtige mechanische Bedeutung besitzt, indem es auch trotz der Anwesenheit mehrgelenkiger Muskeln, vom Standpunkte der Muskeldynamik aus betrachtet, der Ausdruck für einen sehr einfachen Bewegungsvorgang ist, zu dessen Hervorbringung weniger Muskeln erforderlich sind, als zur Erzeugung der Bewegung in einem

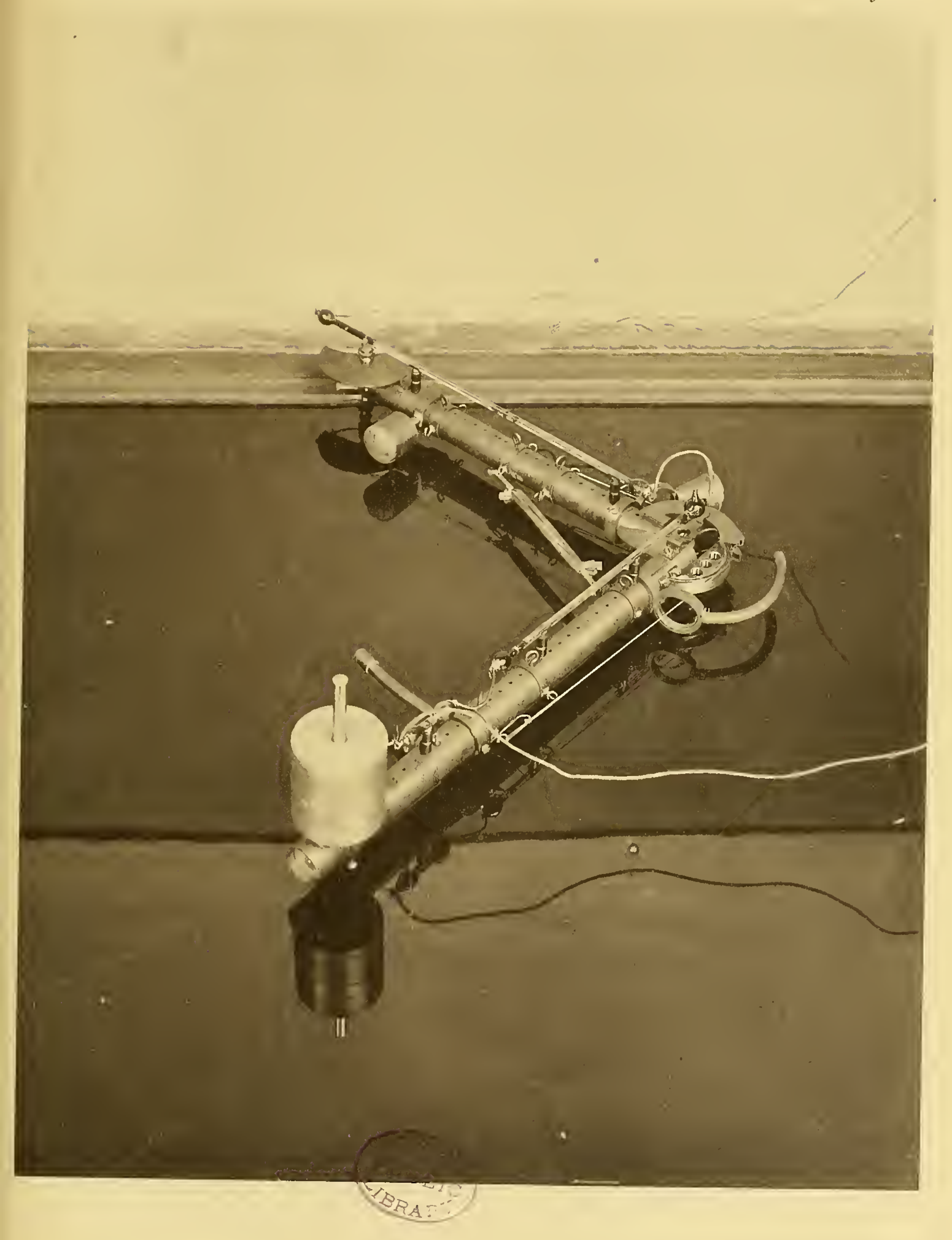
einzigen Gelenk, ohne begleitende Bewegung in einem Nachbargelenk. —

Was nun speciell die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln anlangt, so hat sich das überraschende Resultat ergeben, dass, unter gewissen vereinfachenden Annahmen über die Zusammensetzung und Beweglichkeit der einzelnen Körperabschnitte und über die Richtung des resultirenden Muskelzuges, das Verhältniss der Drehungen in dem Gelenk, über welches der Muskel hinwegzieht, und in einem Nachbargelenk für den ganzen Ablauf der Bewegung ganz unabhängig von der Lage der Insertionsstellen und der Grösse der Spannung des Muskels ist. So wird z. B. die durch einen eingelenkigen Muskel des Ellbogengelenks hervorgebrachte Gesammtbeugung oder Gesammtstreckung von ca. 150° zwischen den beiden extremen Stellungen des Ellbogengelenks, wenn der Mittelpunkt des Schultergelenks fixirt ist, von einer Streckung oder Beugung des Schultergelenks begleitet, deren Betrag stets derselbe, nämlich abgerundet 45° ist, — gleichgültig, in welcher Entfernung sich die Muskelinsertionspunkte von der Axe des Ellbogengelenks befinden, gleichgültig mit welcher Stärke der Muskel im Verlaufe der Contraction gespannt ist. Was für das Verhältniss der Gesammtdrehungen in beiden Gelenken stattfindet, gilt auch für jedes kleine Stück der Gliederbewegung. Das Drehungsverhältniss hat für jede Ausgangsstellung und für jede Phase der Gliederbewegung einen ganz bestimmten Werth. Es ist demnach die Bewegung, welche bei alleiniger Contraction eines eingelenkigen Muskels eintritt, eine Zwangsbewegung, insofern der Arm eine ganz bestimmte Folge von Gliederstellungen durchlaufen muss. Das Einzige, was man willkürlich abändern kann, ist die Geschwindigkeit, mit welcher diese Zwangsbewegung ausgeführt wird, je nachdem man die eingelenkigen Muskeln stärker oder schwächer innervirt.

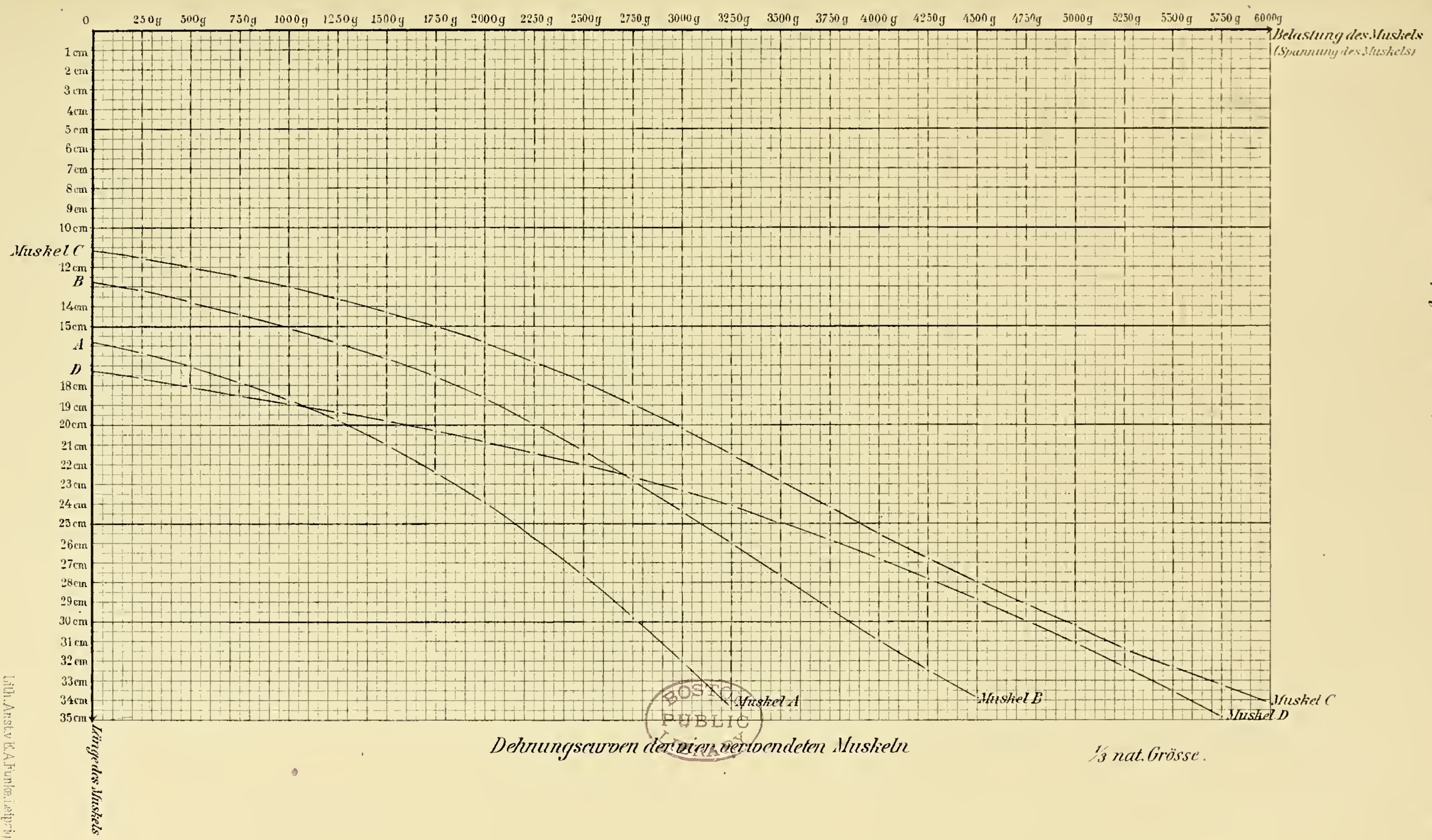
Während nun durch keine Änderung der Insertionsstellen oder der Muskelspannung die Gliederbewegung in andere Bahnen gezwungen werden kann, wird der Bewegungsvorgang sofort ein anderer, wenn man einen der beiden in Frage kommenden Körpertheile, z. B. den Unterarm, belastet. Hält man ein Gewicht in der Hand, so tritt bei alleiniger Contraction eines eingelenkigen Beugers oder Streckers des Ellbogengelenks sofort eine andere Gliederbewegung ein. Der Ober-

arm dreht sich jetzt verhältnissmässig mehr nach rückwärts wie im Falle des unbelasteten Unterarmes. Die Streckung im Schultergelenk, welche die Beugung des Ellbogengelenks begleitet, wird grösser, und sie nimmt um so mehr zu, je grösser das in der Hand gehaltene Gewicht ist. Bei einem Gewicht von abgerundet $4\frac{1}{2}$ kg zum Beispiel war bei dem zum Versuche benutzten Arme die Streckung im Schultergelenk im ganzen Verlaufe der Gliederbewegung gerade halb so gross als die Beugung im Ellbogengelenk. Es wird daher in diesem Falle bei der Bewegung von der Streckstellung des Armes aus in jedem Moment die Längsaxe des Oberarms um ebensoviel nach rückwärts als die Längsaxe des Unterarms nach vorwärts von der ursprünglichen Richtung abweichen. Bei sehr grossem Gewicht findet die Gliederbewegung nahezu in der Weise statt, dass der Schwerpunkt des in der Hand gehaltenen Gewichts bei der Beugebewegung des Armes sich in gerader Linie auf den Mittelpunkt des Schultergelenks zu bewegt und bei der Streckbewegung sich in gerader Linie von demselben entfernt.









Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig





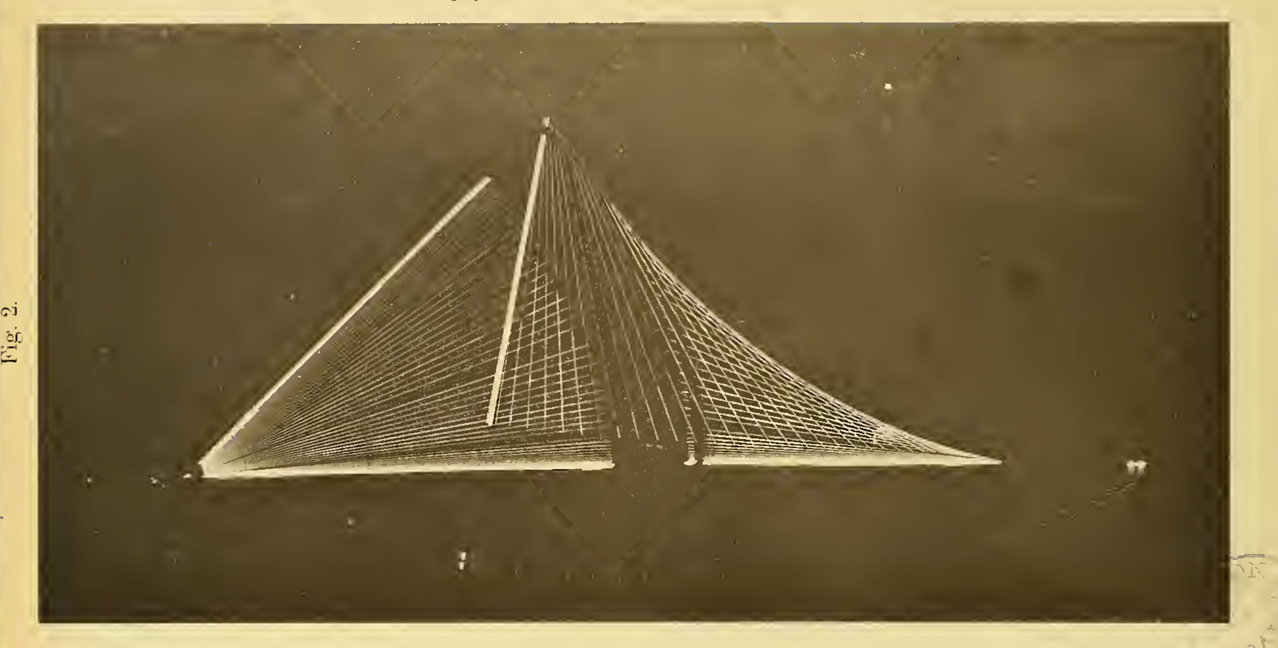


Fig. 2.

Fig. 1.

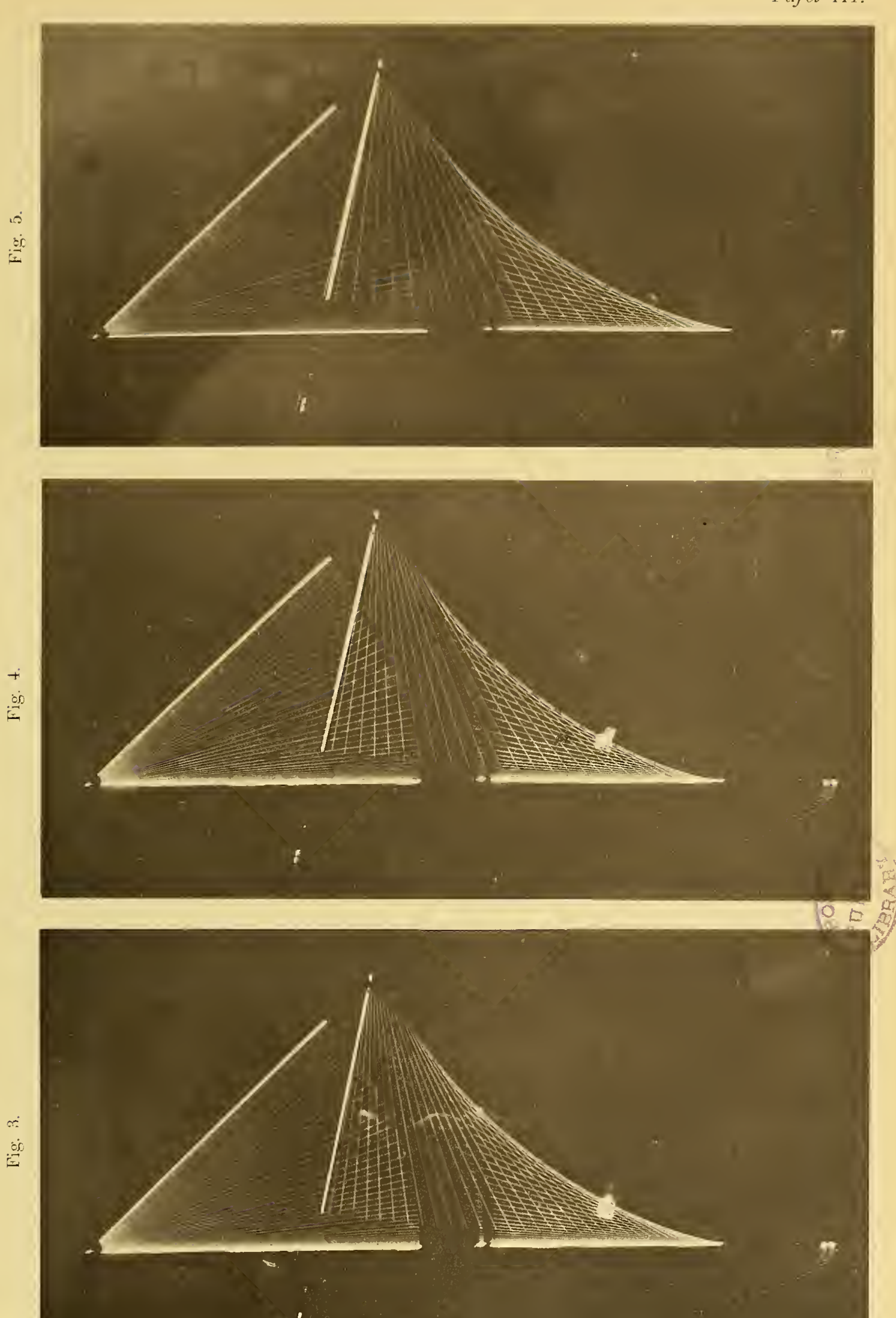


Fig. 5.

Fig. 4.

Fig. 3.




Fig. 3.



Fig. 2.

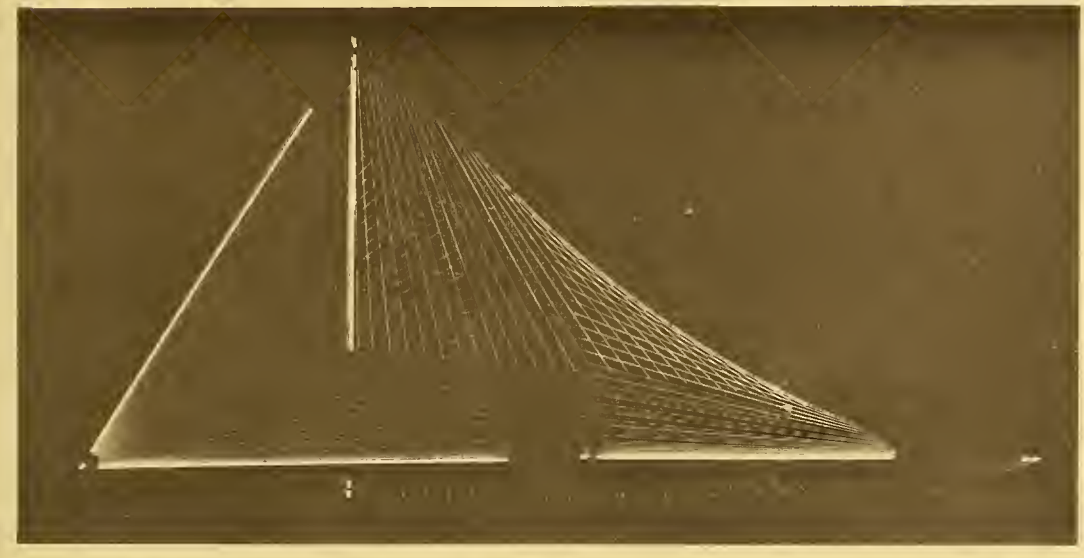



Fig. 1.







Fig. 2.

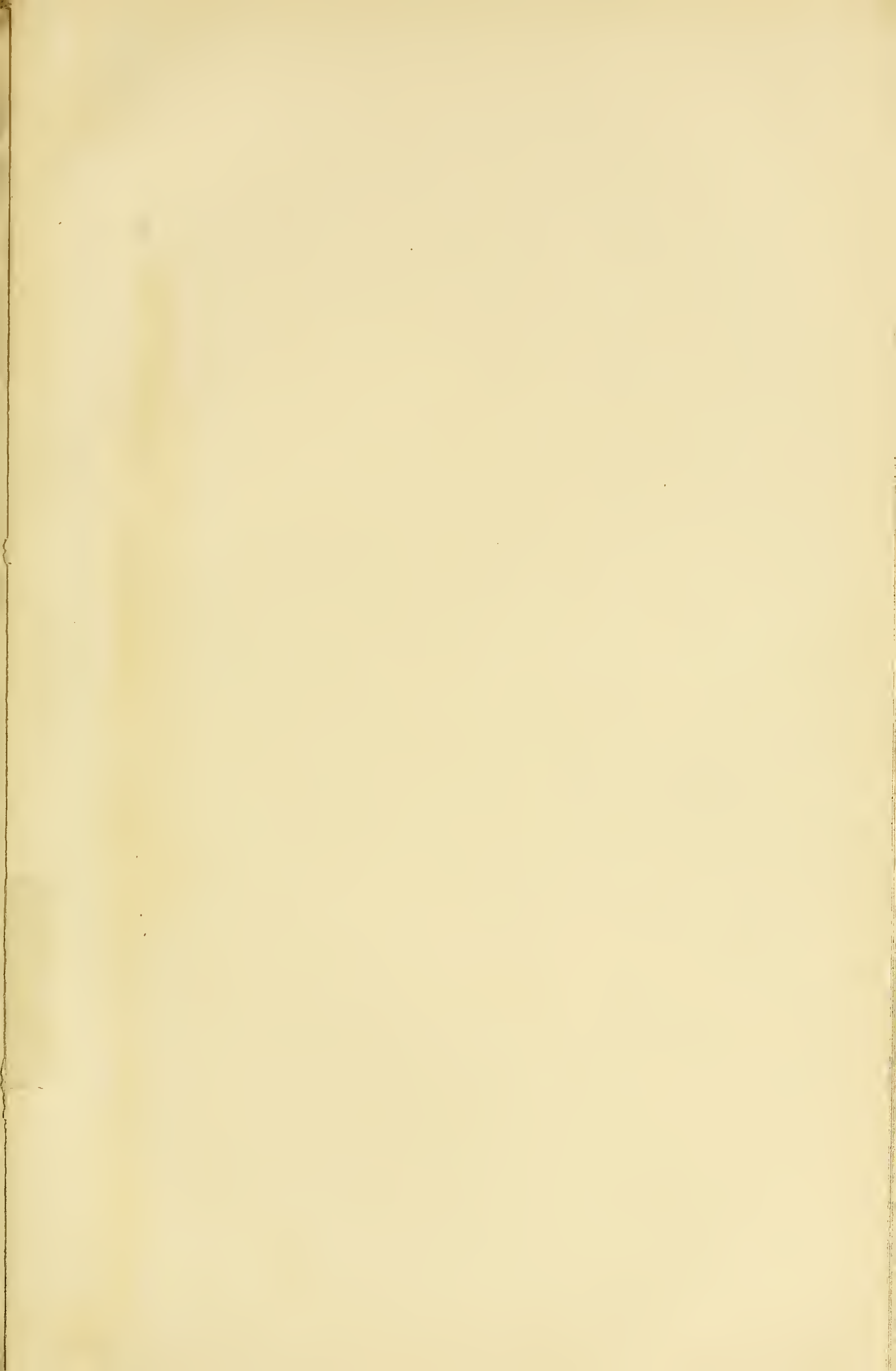
Fig. 1.

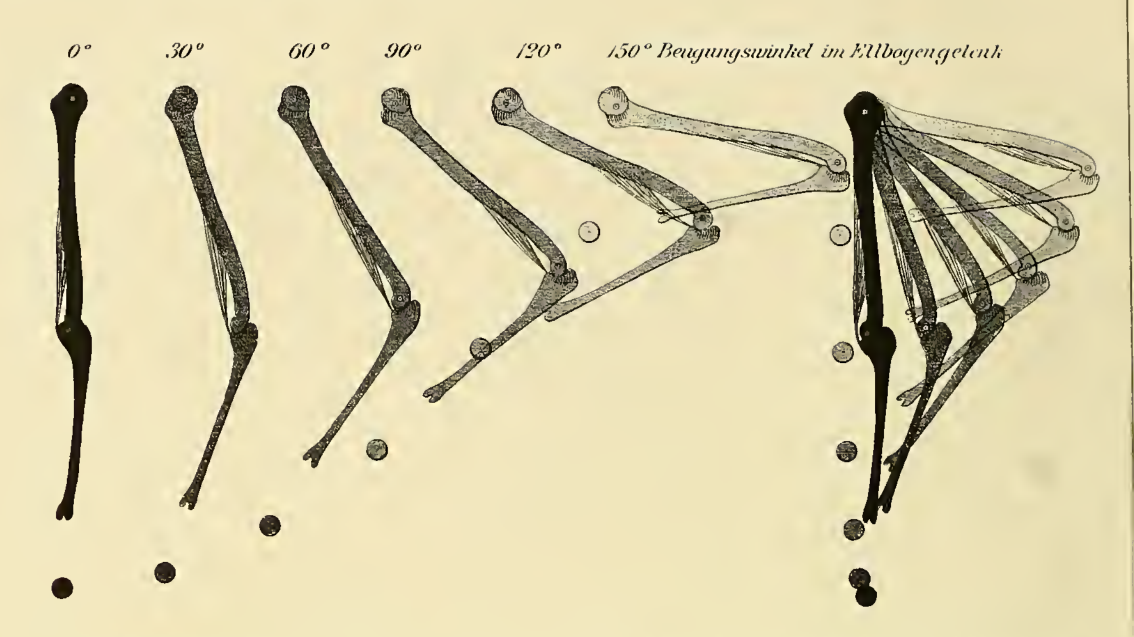
Fig. 5.

Fig. 4.

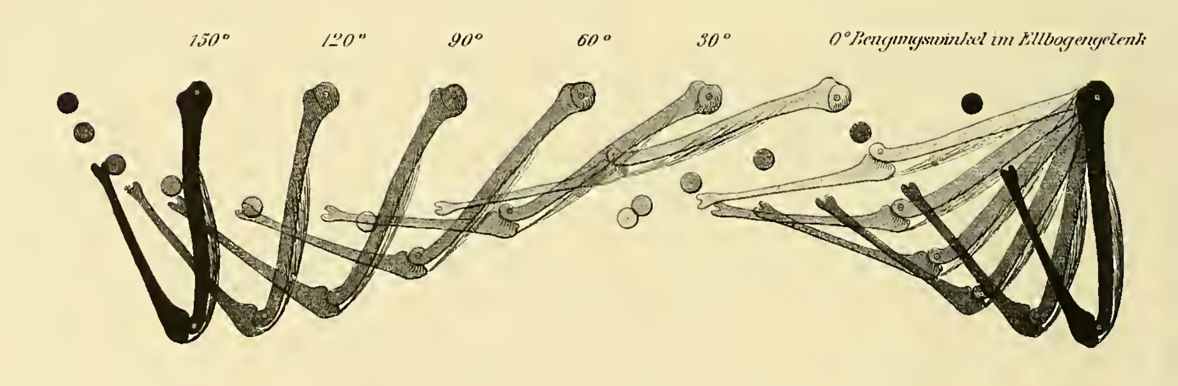
Fig. 3.



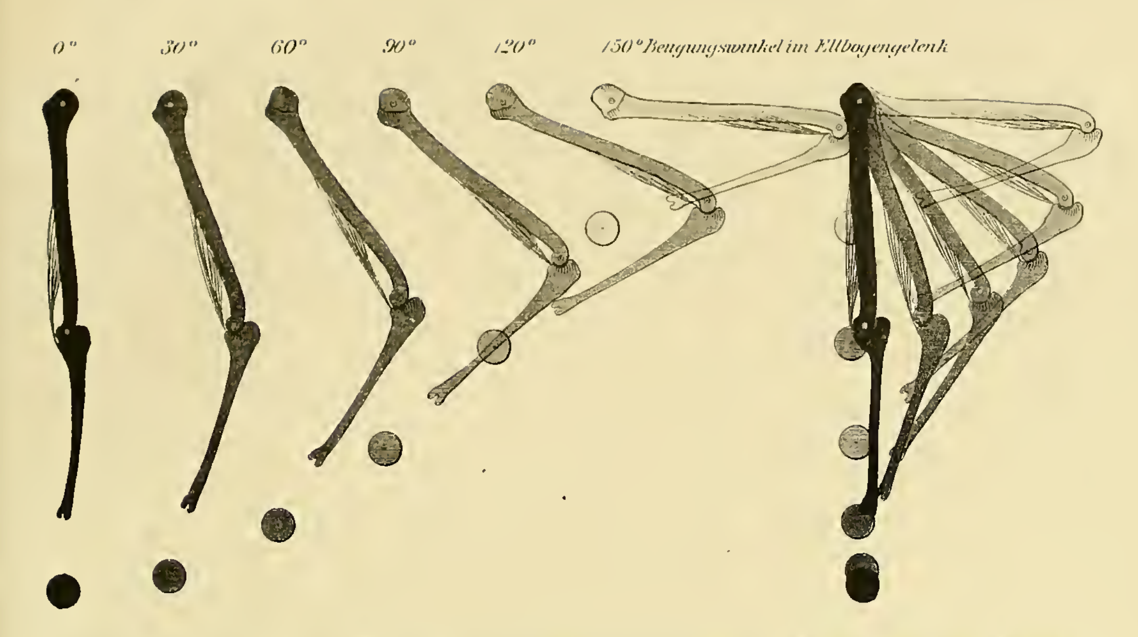




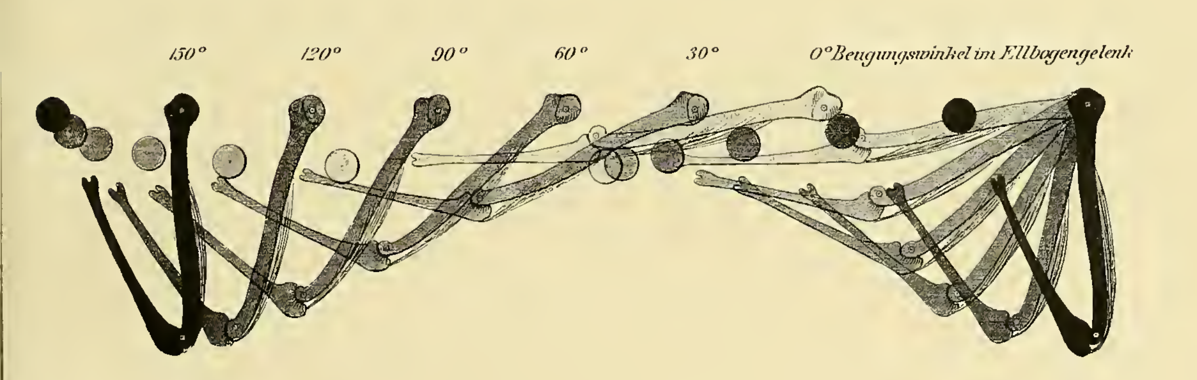
Beugebewegung des Arms bei 4400 g Handbelastung infolge alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Beugemuskels des Ellbogengelenks.



Streckbewegung des Arms bei 4400 g Handbelastung infolge alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Streckmuskels des Ellbogengelenks.



Beugebewegung des Arms bei 15000 g Handbelastung infolge alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Beugemuskels des Ellbogengelenks.

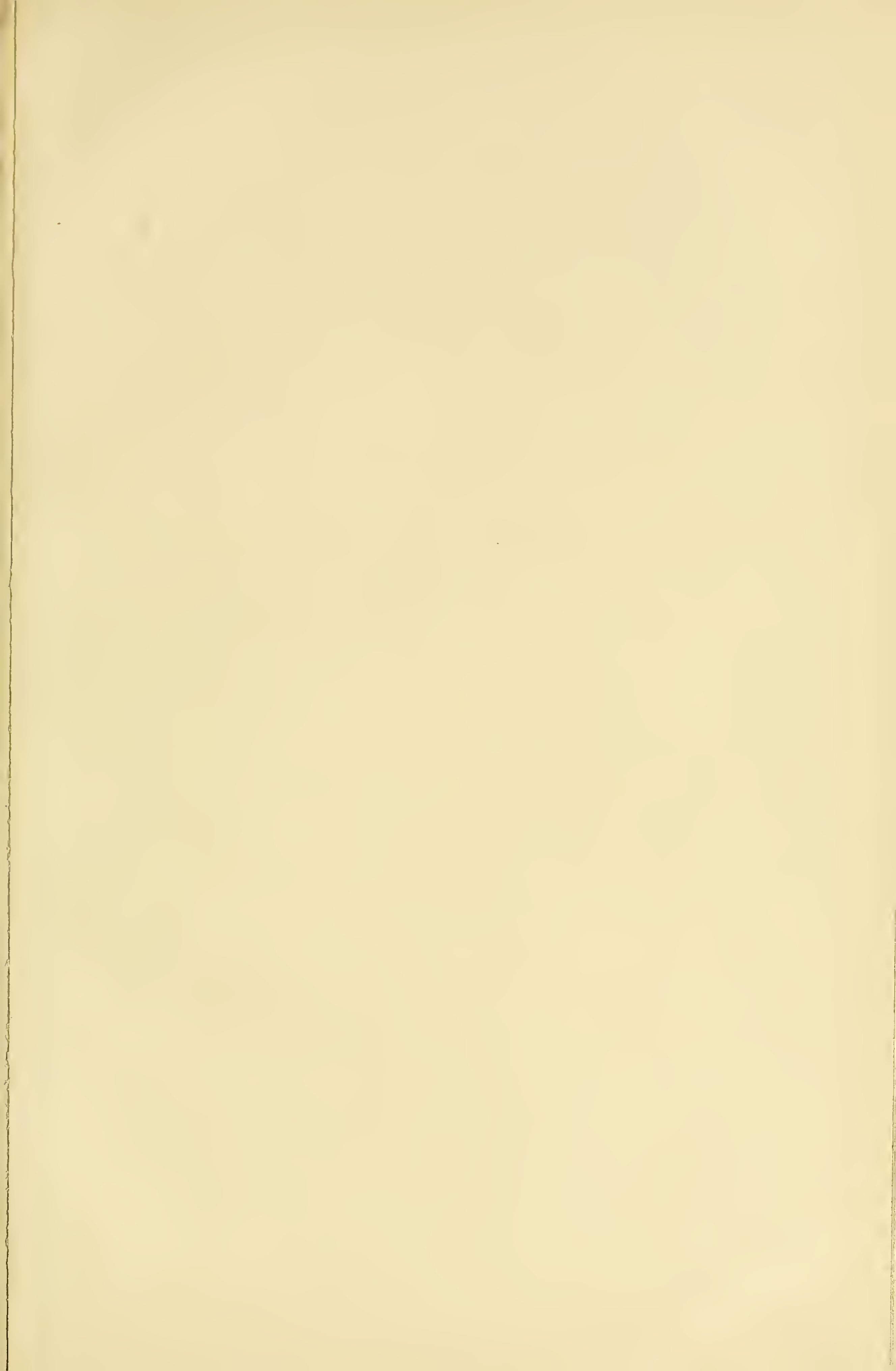


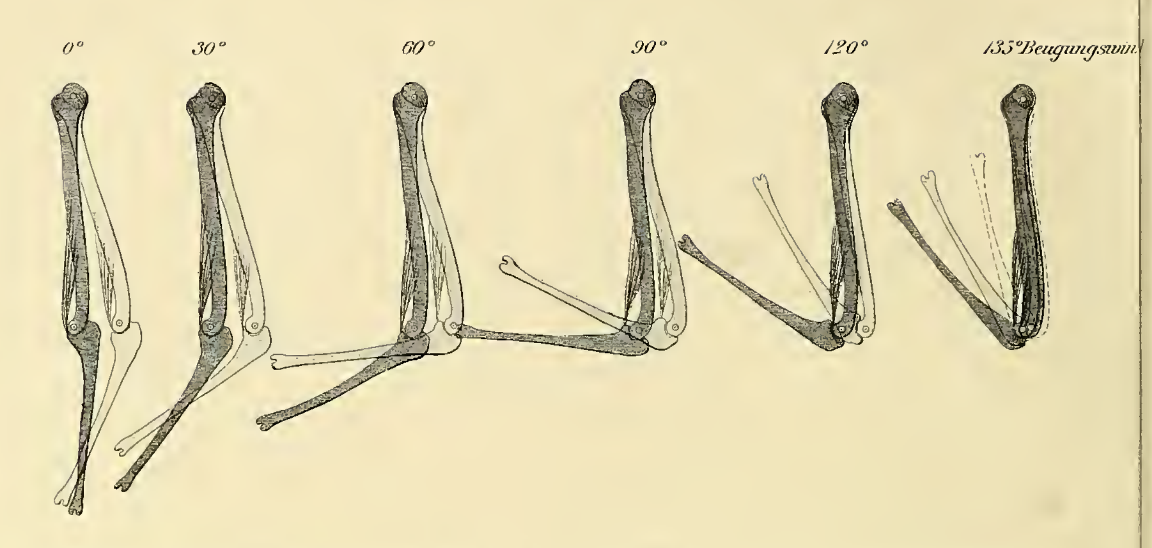


Streckbewegung des Arms bei 15000 g Handbelastung infolge alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Streckmuskels des Ellbogengelenks.

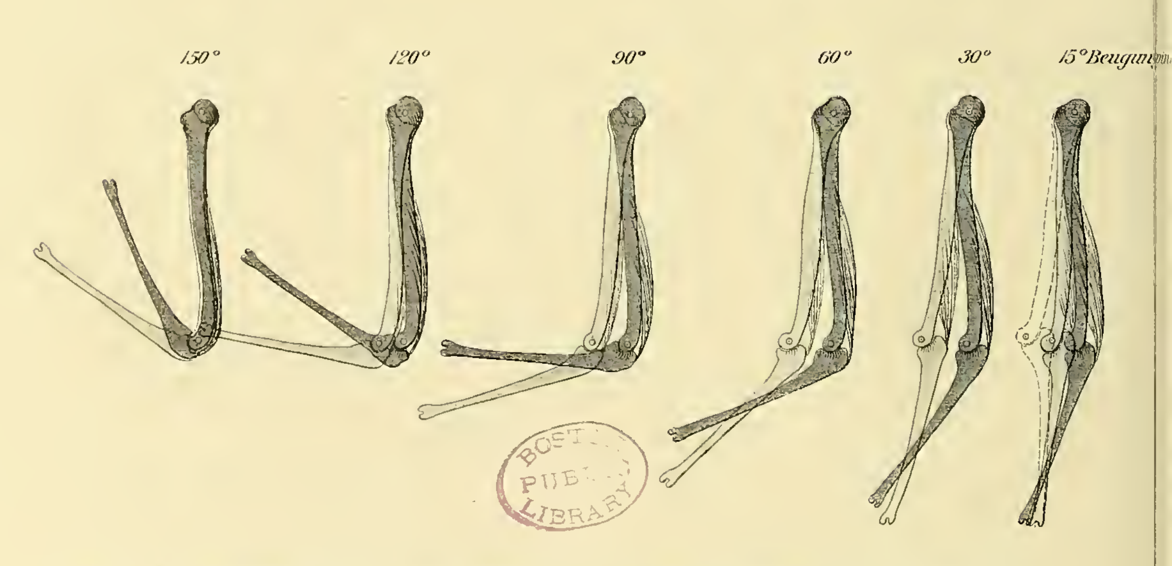
Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig.



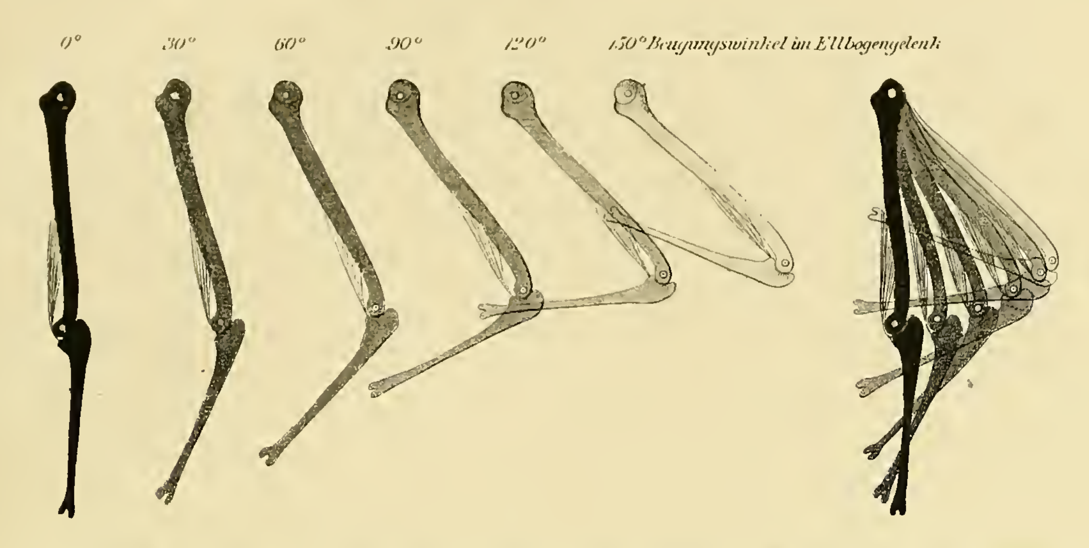




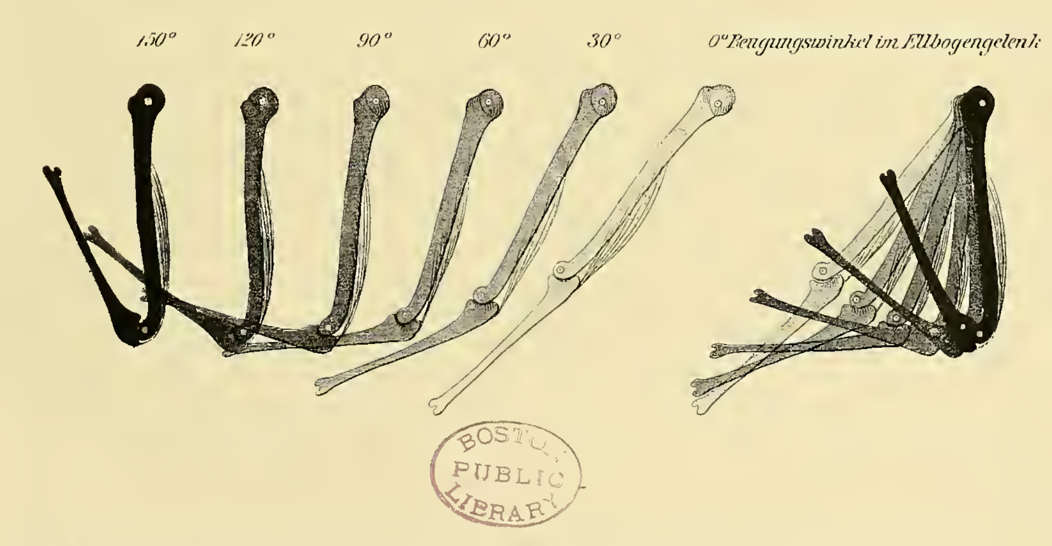
Anfang der Beugebewegung des unbelasteten Arms bei alleiniger Contraction eines eingelenkigen Beugemuskels des Ellbogengelenks für verschiedene Ausgangsstellungen.



Anfang der Streckbewegung des unbelasteten Arms bei alleiniger Contraction eines eingelenkigen Streckmuskels des Ellbogengelenks für verschiedene Ausgangsstellungen.



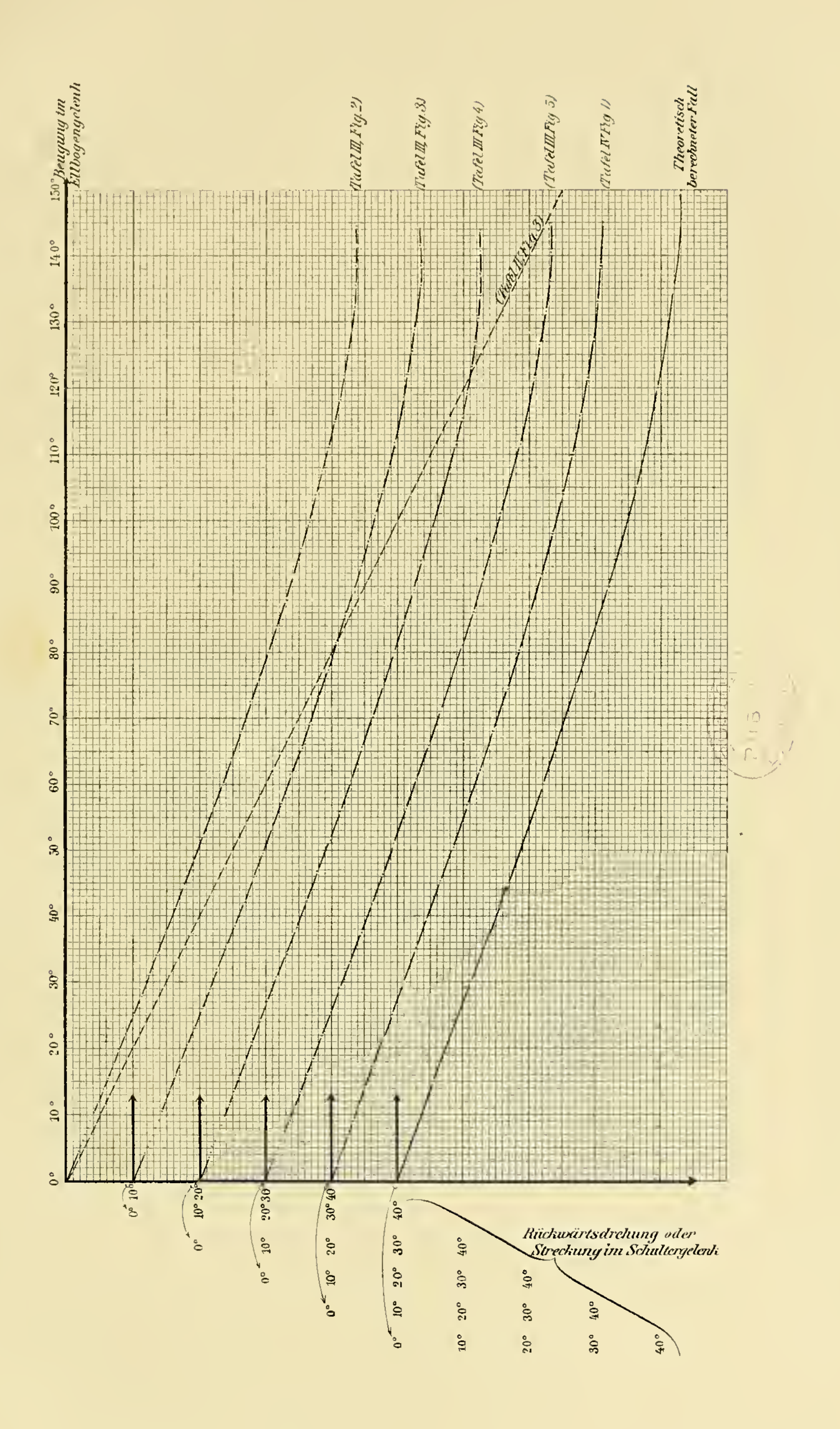
Beugebewegung des Arms ohne Handbelastung infolge alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Beugemuskels des Ellbogengelenks.



Streckbewegung des Arms ohne Handbelastung infolge alleiniger Wirkung eines eingelenkigen Streckmuskels des Ellbogengelenks.

Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig





Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig.



NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 M.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 M 40 Pf.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 M.

—— Supplement zu der geodätischen Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 1 Tafeln. 1870. 2 M 40 Pf.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 M.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 M.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 M.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 M 60 Pf.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 M 60 Pf.

C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 M.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 M.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 M 80 Pf.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 M.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Funktion der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 M.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 M.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 M.

... der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und ... 2 M.

... e elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 M.

... gen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des ... s und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 M.

... rossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 M.

... en. Zwölfte Abhandluug: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des ... les Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 M.

... n, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 M.

... grundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 M.

... gen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 M.

... Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 M.

... n. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften ... , Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 M.

... Integrale in reeller Form. 1879. 5 M.

... eduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 M 50 Pf.

... en. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen ... Tafeln. 1879. 2 M.

... ifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte ... 2 M 40 Pf.

... oaten. 1880. 1 M 50 Pf.

... er Kugelcalotte. 1880. 2 M 40 Pf.

... en. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen ... e Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 M.

... e Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, ... kits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases ... 2 M.

... Abhandlung: Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auft etenden ... 1 M 80 Pf.

... it 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 M.

... r'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes. 2 M 80 Pf.

... schen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder ... s. 1884. 7 M.

... Die bei der Untersuchung on Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. 1885. 2 M.

F. KLEIN, Ueber die elliptischen Normalcurven d. n^{ten} Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen d. n^{ten} Stufe 1885. 1 M 80 Pf.

C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke. $P_n\,(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n\,(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. 1886. 2 M 40 Pf.

W. HIS, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten. 1886. 2 M.

H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 M.

R. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Taf. 1887. 7 M.

C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Erste Abhandlung. Mit 11 Holzschnitten. 1887. 3 M 20 Pf.

VIERZEHNTER BAND. (XXIV. Bd.) Mit 54 Tafeln u. 1 geolog. Karte. hoch 4. 1888. brosch. Preis 42 M.

J. WISLICENUS, Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekülen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. Mit 186 Figuren. 2. Abdruck. 1889. 4 M.

W. BRAUNE und O. FISCHER, Untersuchungen über die Gelenke des menschlichen Armes. 1. Theil: Das Ellenbogengelenk von O. Fischer. 2. Theil: Das Handgelenk von W. Braune und O. Fischer. Mit 12 Holzschnitten und 15 Tafeln. 1887. 5 M.

J. P. MALL, Die Blut- und Lymphwege im Dünndarm des Hundes. Mit 6 Tafeln. 1887. 5 M.

W. BRAUNE und O. FISCHER, Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen. Mit 2 Holzschnitten. 1887. 1 M.

O. DRASCH, Untersuchungen über die papillae foliatae et circumvallatae des Kaninchen und Feldhasen. Mit 8 Tafeln. 1887. 4 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achtzehnte Abhandlung: Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Boracitkrystalle. Mit 3 Tafeln. 1887. 2 M.

W. HIS, Zur Geschichte des Gehirns sowie der centralen und peripherischen Nervenbahnen. Mit 3 Tafeln und 27 Holzschnitten. 1888. 3 M.

W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 M 60 Pf.

G. HEINRICIUS und H. KRONECKER, Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme. Mit 5 Tafeln. 1888. 1 M 80 Pf.

J. WALTHER, Die Korallenriffe der Sinaihalbinsel. Mit 1 geolog. Karte, 7 lithogr. Tafeln, 1 Lichtdrucktafel und 34 Zinkotypen. 1888. 6 M.

W. SPALTEHOLZ, Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 M 80 Pf.

S. LIE, Zur Theorie der Berührungstransformationen. 1888. 1 M.

C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Zweite Abhandlung. Mit 19 Holzschnitten. 1888. 6 M.



NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 ℳ.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.
—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.
—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.
G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 ℳ.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.
C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 ℳ.
—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 ℳ.
C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.
P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.
—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.
—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.
C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.
P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.
W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ.
C. NEUMANN, Das Weber'sche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ.
W. WEBER, Elektrodynam. Maassbestimmungen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.
W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.
—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 ℳ 50 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 ℳ.
C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 ℳ 40 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 ℳ 50 ₰.
—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 ℳ.
—— Elektrische Untersuchungen. Sechzehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits. Mit 3 Tafeln. 1882. 2 ℳ.
—— Elektrische Untersuchungen. Siebzehnte Abhandlung: Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 ℳ 80 ₰.

DREIZEHNTER BAND. (XXII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes. 1884. 2 ℳ 80 ₰.
—— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. 1884. 7 ℳ.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. 1885. 2 ℳ.
F. KLEIN, Ueber die elliptischen Normalcurven d. n^{ten} Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen d. n^{ten} Stufe 1885. 1 ℳ 80 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. 1886. 2 ℳ 40 ₰.
W. HIS, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten. 1886. 2 ℳ.
H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 ℳ.
R. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Taf. 1887. 7 ℳ.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Erste Abhandlung. Mit 11 Holzschnitten. 1887. 3 ℳ 20 ₰.

VIERZEHNTER BAND. (XXIV. Bd.) Mit 54 Tafeln u. 1 geolog. Karte. hoch 4. 1888. brosch. Preis 42 ℳ.

J. WISLICENUS, Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekülen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. Mit 186 Figuren. 2. Abdruck. 1889. 4 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Untersuchungen über die Gelenke des menschlichen Armes. 1. Theil: Das Ellenbogengelenk von O. Fischer. 2. Theil: Das Handgelenk von W. Braune und O. Fischer. Mit 12 Holzschnitten und 15 Tafeln. 1887. 5 ℳ.
J. P. MALL, Die Blut- und Lymphwege im Dünndarm des Hundes. Mit 6 Tafeln. 1887. 5 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen. Mit 2 Holzschnitten. 1887. 1 ℳ.
O. DRASCH, Untersuchungen über die papillae foliatae et circumvallatae des Kaninchen und Feldhasen. Mit 8 Tafeln. 1887. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achtzehnte Abhandlung: Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Boracitkrystalle. Mit 3 Tafeln. 1887. 2 ℳ.
W. HIS, Zur Geschichte des Gehirns sowie der centralen und peripherischen Nervenbahnen. Mit 3 Tafeln und 27 Holzschnitten. 1888. 3 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 ℳ 60 ₰.
G. HEINRICIUS und H. KRONECKER, Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme. Mit 5 Tafeln. 1888. 1 ℳ 80 ₰.
J. WALTHER, Die Korallenriffe der Sinaihalbinsel. Mit 1 geolog. Karte, 7 lithogr. Tafeln, 1 Lichtdrucktafel und 34 Zinketypen. 1888. 6 ℳ.
W. SPALTEHOLZ, Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 ℳ 80 ₰.
S. LIE, Zur Theorie der Berührungstransformationen. 1888. 1 ℳ.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Zweite Abhandlung. Mit 19 Holzschnitten. 1888. 6 ℳ.

FÜNFZEHNTER BAND. (XXVI. Bd.) Mit 42 Tafeln. hoch 4. 1890. brosch. Preis 35 *M.*

B. PETER, Monographie der Sternhaufen G. C. 4460 und G. C. 1440, sowie einer Sterngruppe bei o Piscium. Mit 2 Tafeln und 2 Holzschnitten. 1889. 4 *M.*
W. OSTWALD, Über die Affinitätsgrössen organischer Säuren und ihre Beziehungen zur Zusammensetzung und Constitution derselben. 1889. *M.*
W. BRAUNE u. O. FISCHER. Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Mit 5 Tafeln und 6 Holzschnitten. 1889. 3 *M.*
W. HIS, Die Neuroblasten und deren Entstehung im embryonalen Mark. Mit 4 Tafeln. 1889. 3 *M.*
W. PFEFFER, Beiträge zur Kenntniss der Oxydationsvorgänge in lebenden Zellen. 1889. 5 *M.*
A. SCHENK, Über Medullosa Cotta und Tubicaulis Cotta. Mit 3 Tafeln. 1889. 2 *M.*
W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen. Mit 17 Tafeln und 18 Figuren. 1889. 8 *M.*
W. HIS, Die Formentwickelung des menschlichen Vorderhirns vom Ende des ersten bis zum Beginn des dritten Monats. Mit 1 Tafel. 1889. 2 *M* 80 *Ꝑ.*
J. GAULE, Zahl und Vertheilung der markhaltigen Fasern im Froschrückenmark. Mit 10 Tafeln. 1889. 3 *M.*

SECHZEHNTER BAND. (XXVII. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1891. brosch. Preis 21 *M.*

P. STARKE, Arbeitsleistung und Wärmeentwickelung bei der verzögerten Muskelzuckung. Mit 9 Tafeln und 3 Holzschnitten. 1890. *M.*
W. PFEFFER, I. Über Aufnahme und Ausgabe ungelöster Körper. — II. Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen nebst Bemerkungen über den Aggregatzustand des Protoplasmas und über osmotische Vorgänge. Mit 2 Tafeln und 1 Holzschnitt. 1890. 7 *M.*
J. WALTHER, Die Denudation in der Wüste und ihre geologische Bedeutung. Untersuchungen über die Bildung der Sedimente in den ägyptischen Wüsten. Mit 8 Tafeln und 99 Zinkätzungen. 1891. 8 *M.*

SIEBZEHNTER BAND. (XXIX. Bd.) Mit 43 Tafeln. hoch 4. 1891. brosch. Preis 33 *M.*

W. HIS, Die Entwickelung des menschlichen Rautenhirns vom Ende des ersten bis zum Beginn des dritten Monats. I. Verlängertes Mark. Mit 4 Tafeln und 18 Holzschnitten. 1891. 4 *M.*
W. BRAUNE und O. FISCHER, Die Bewegungen des Kniegelenks, nach einer neuen Methode am lebenden Menschen gemessen. Mit 19 Tafeln und 6 Figuren 1891. 5 *M.*
R. HAHN, Mikrometrische Vermessung des Sternhaufens Σ 762, ausgeführt am zwölffüssigen Äquatoreal der Leipziger Sternwarte. Mit 1 Tafel. 1891. 6 *M.*
F. MALL. Das reticulirte Gewebe und seine Beziehungen zu den Bindegewebsfibrillen. Mit 11 Tafeln. 1891. 5 *M.*
L. KREHL, Beiträge zur Kenntniss der Füllung und Entleerung des Herzens. Mit 7 Tafeln. 1891. 5 *M.*
J. HARTMANN, Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Mit 1 lithogr. Tafel u. 3 Textfiguren. 1891. 8 *M.*

ACHTZEHNTER BAND. (XXXI. Bd.) Mit 26 Tafeln. hoch 4. 1893. brosch. Preis 24 *M.*

W. HIS jun., Die Entwickelung des Herznervensystems bei Wirbelthieren. Mit 4 Tafeln. 1891. 5 *M.*
C. NEUMANN, Über einen eigenthümlichen Fall elektrodynamischer Induction. Mit 1 Holzschnitt. 1892. 3 *M.*
W. PFEFFER, Studien zur Energetik der Pflanze. 1892. 4 *M.*
W. OSTWALD, Ueber die Farbe der Jonen. Mit 7 Tafeln. 1892. 2 *M.*
O. EICHLER, Anatomische Untersuchungen über die Wege des Blutstromes im menschlichen Ohrlabyrinth. Mit 4 Tafeln und 3 Holzschnitten. 1892. 3 *M.*
H. HELD, Die Beziehungen des Vorderseitenstranges zu Mittel- und Hinterhirn. Mit 3 Tafeln. 1892. 1 *M.* 20 *Ꝑ.*
W. G. HANKEL und H. LINDENBERG, Elektrische Untersuchungen. Neunzehnte Abhandlung: Über die thermo- und piëzoelektrischen Eigenschaften der Krystalle des chlorsauren Natrons, des unterschwefelsauren Kalis, des Seignettesalzes, des Resorcins, des Milchzuckers und des dichromsauren Kalis. Mit 3 Tafeln. 1892. 1 *M.* 80 *Ꝑ.*
W. BRAUNE und O. FISCHER, Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder. Mit 5 Tafeln und 7 Figuren. 1892. 4 *M.*

NEUNZEHNTER BAND. (XXXII. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1893. brosch. Preis 12 *M.*

J. T. STERZEL, Die Flora des Rothliegenden im Plauenschen Grunde bei Dresden. Mit 13 Tafeln. 1893. 12 *M.*

ZWANZIGSTER BAND. (XXXIII. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1893. brosch. Preis 21 *M.*

O. FISCHER, Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Mit 2 Tafeln u. 11 Fig. 1893. 4 *M.*
E. STUDY, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Mit 16 Figuren. 1893. 5 *M.*
W. PFEFFER, Druck- und Arbeitsleistung durch wachsende Pflanzen. Mit 14 Holzschnitten. 1893. 8 *M.*
H. CREDNER, Zur Histologie der Faltenzähne paläozoischer Stegocephalen. Mit 4 Tafeln und 5 Textfiguren. 1893. 4 *M.*

EINUNDZWANZIGSTER BAND. (XXXV. Bd.) Mit 17 Tafeln. hoch 4. 1895. brosch. Preis 27 *M.*

O. EICHLER, Die Wege des Blutstromes durch den Vorhof und die Bogengänge des Menschen. Mit 1 Doppeltafel. 1894. 1 *M.*
W. G. HANKEL und H. LINDENBERG, Elektrische Untersuchungen. Zwanzigste Abhandlung: Über die thermo- und piëzoelektrischen Eigenschaften der Krystalle des brom- und überjodsauren Natrons, des Asparagins, des Chlor- und Brombaryums, sowie des unterschwefelsauren Baryts und Strontians. Mit 2 Tafeln. 1894. 1 *M* 60 *Ꝑ.*
S. LIE, Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen. 1895. 5 *M.*
W. BRAUNE und O. FISCHER, Der Gang des Menschen. I. Theil: Versuche am unbelasteten und belasteten Menschen. Mit 14 Tafeln und 26 Textfiguren. 1895. 12 *M.*
H. BRUNS, Das Eikonal. 1895. 5 *M.*
J. THOMAE, Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften, und einige Erzeugnisse derselben. 1895. 3 *M.*

ZWEIUNDZWANZIGSTER BAND. (XXXVII. Bd.)

H. CREDNER, Die Phosphoritknollen des Leipziger Mitteloligocäns und die norddeutschen Phosphoritzonen. 1895. Mit 1 Tafel. 2 *M.*
O. FISCHER, Beiträge zu einer Muskeldynamik. Erste Abhandlung: Über die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln. 1895. Mit 8 Tafeln und 13 Textfiguren. 9 *M.*

Leipzig, September 1895. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.
—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.
Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.
—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft (1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1) 1881 (1) 1882 (1) 1883 (1) 1884 (2) 1885 (3) 1886 (4 mit Supplement) 1887 (2) 1888 (2) 1889 (4) 1890 (4) 1891 (5) 1892 (6) 1893 (9) 1894 (3).
—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2) 1880 (2) 1881 (2) 1882 (1) 1883 (2) 1884 (4) 1885 (4) 1886 (2) 1887 (5) 1888 (4) 1889 (4) 1890 (3) 1891 (3) 1892 (3) 1893 (3) 1894 (2). Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 *M.* zu haben.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

8







